Ueber Eigenschaften des Dreiecks, welche sich durch Projektion des Feuerbach'schen Kreises ergeben.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde bei der philosophischen Facultät der Königlichen Akademie zu Münster

von

Paul Schönemann,
Gymnasiallehrer am Archigymnasium
zu Soest.

Soest.
Nasse'sche Buchdruckerei.
1881.

Herrn

Geheimrath Professor Dr. Knoblauch

zu Halle a. d. S.

in dankbarer Erinnerung

gewidmet

vom Verfasser.

Einleitung.

Von den verschiedenen geometrischen Disciplinen ist es besonders die Perspektive, welche von jehe besondere Anziehungskraft auf mich ausgeübt hat. In der Lehre derselben laufen wie in einen gemein lichen Vereinigungspunkt zusammen die Methoden der euklidischen Geometrie, der descriptiven und synthe Geometrie; auch die analytische Behandlung führt zu interessanten Resultaten auf algebraischem Gebiete.

In meiner zu Ostern 1879 erschienenen Programmabhandlung des Archigymnasiums zu Soe ich die Hauptgesetze der Perspektive für ebene Figuren unter dem Titel: „Die Gesetze der Centralpr und ihre Anwendung auf die Geometrie" veröffentlicht.

An diese Arbeit schließt sich folgende Abhandlung insofern an, als sie die dort entwickelten un mein bekannten Grundgesetze zum Ausgangspunkt nimmt.

Im Übrigen beruht die Arbeit auch auf den Resultaten der neueren Geometrie.

In letztere Wissenschaft wurde ich dereinst während meiner Studienzeit eingeführt durch Professor Thomae.

Weitere Belehrung fand ich in folgenden mich anregenden Werken:

„Zech, die höhere Geometrie,"

„Reye, die Geometrie der Lage."

Auch das Studium von

„Monge, Géométrie déscriptive"

ist mir von Vortheil gewesen.

Besonderes Interesse erregten mir diejenigen Sätze der Geometrie der Ebene, welche man mit einer räumlichen Vorstellung ableiten konnte. Es erhalten dann dieselben einen Grad der Durchsichtigkeit Klarheit, wie sie für einen in räumlicher Vorstellungskraft Geübten keine andere Methode darbietet. Ein kommenes Feld für derartige Betrachtungen bot mir die Anwendung der Perspektive auf die Behandlun Kegelschnitte und des Feuerbach'schen Kreises dar.

Als ich jedoch meine Arbeit schon am Abschluß glaubte, wurde ich von Herrn Professor Sturm d hingewiesen, daß Herr Professor Schröter in Crelle's Journal, Band 68, 1868 denselben Stoff von allgemeineren Standpunkt ausgehend bearbeitet habe. Außerdem erwähnt Herr Professor Schröter die lichkeit, die Methode der Centralprojektion anzuwenden.

Nichtsdestoweniger hoffe ich aber auch in dieser Arbeit, welche ich selbstständig angefangen und geführt habe, zu Resultaten gekommen zu sein, welche es berechtigen, dieselben in dieser Form zu veröffent

Die nachträgliche Kenntnißnahme des Aufsatzes von Herrn Professor Schröter hat auf den Gang
lntersuchung keinen Einfluß geübt; mich dagegen veranlaßt, dieselbe nach verschiedenen Richtungen hin
.ern.

Dagegen muß ich es an dieser Stelle aussprechen, daß das Studium des Steiner-Schröter'schen

„Die Theorie der Kegelschnitte"

) und die vorliegende Arbeit von Nutzen gewesen ist.

Abschnitt I.

A. Zusammenhang der central collinearen und perspektivischen Beziehungen der Kegelschn

---

A.

§ 1. Bezeichnung der perspektivischen Beziehungen und Bedingung der central collinearen Lage e Figuren und Curven.

Da in vorliegender Abhandlung die Centralprojektion zur Untersuchung angewendet wird, so wer die Gesetze der Perspektive als bekannt vorausgesetzt; doch sollen vorher einige Beziehungen, auf welche sp hingewiesen wird, noch kurz erörtert werden.

Über die Bezeichnung ist folgendes zu bemerken Fig. I Tafel I.

Das Projektionscentrum ist mit O bezeichnet,

Die Grundebene mit G,

Die Bildebene mit B,

Die Fluchtebene d. h. die Ebene, welche durch P parallel der Grundebene gelegt ist, mit F,

Die Verschwindungsebene d. h. die Ebene, welche durch O parallel der Bildebene gelegt ist, mit V.

Diese 4 paarweise parallelen Ebenen begrenzen einen unendlichen parallelopipedischen Raum. Von de 4 sich bildenden parallelen Kanten geht eine durch O.

Die zweite Kante entsteht durch den Durchschnitt der Bild- und Fluchtebene. Sie führt den Name „Fluchtlinie" und ist mit f bezeichnet.

Die dritte Kante entsteht durch den Durchschnitt von Bild- und Grundebene. Sie wird, wenn um s die Bildebene in die Grundebene hineingedreht wird, zur Collineationsachse zweier zu einem Punkt O geh gen perspektivischen Figuren; sie ist mit c bezeichnet.

Die vierte Kante ist die Durchschnittslinie der Verschwindungsebene mit der Grundebene. Sie führt d Namen Verschwindungslinie und ist durch v bezeichnet.

Von den Projektionen des Punktes O auf die Linie f und v hat erstere die Bezeichnung „Augenpunk letztere Fußpunkt für den Fall, daß Grundebene und Bildebene normal zu einander sind.

Das Bild eines Punktes A und einer Linie l wird durch A' und l' angedeutet.

Für Vorstellung und Zeichnung (s. Figur I) ist es bequem, die Grundebene horizontal, die Bildebene nzunehmen.

Aus bekannten Gesetzen folgt:

Ist das Dreieck A' B' C' das Bild des Dreiecks A B C, so schneiden sich, wenn wir je zwei Seiten ' B' und A B als „homolog" bezeichnen, die drei homologen Seitenpaare der Bild- und Grundebene in Punkten der Linie c.

Denkt man sich die Grundebene fest und die Bildebene um die Linie c drehbar, so bleibt bei der ung der Bildebene die Figur A' B' C' stets das perspektivische Bild der festen Figur A B C. Das ectionscentrum O beschreibt bei vollständiger Umdrehung der Bildebene einen Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Verschwindungslinie v. Der Mittelpunkt des Kreises, welcher der Ort der Projektionscentra ist, wird die Projection des Punktes O in irgend einer Lage auf die Verschwindungslinie v bestimmt.

Bei der vollständigen Umdrehung der Bildfläche B um die Linie c wird zweimal der Fall eintreten, Bildebene B und Verschwindungsebene V in die Grundfläche A hineinfallen.

In diesen beiden Fällen haben die Figuren A B C und A' B' C' eine „central collineare" Lage. Linie c ist Collineationsachse. Collineationscentra sind diejenigen beiden Punkte, in welchen der erwähnte tskreis des Projektionscentrums die Grundebene G durchbohrt.

Dieses Collineations-Centrum wird mit dem Buchstaben P bezeichnet.

Diese beiden Punkte P haben übrigens, auch wenn die Bildebene nicht in die Grundebene hineingedreht eine ganz besondere Bedeutung.

Verbinden wir nemlich (Fig. I) Punkt O mit P, so wird dieser Projektionsstrahl die Bildebene im unkte P' schneiden. Da bei der Drehung der Bildebene in die Grundebene P' auf P fällt, so liegen P' und symmetrisch zur Linie c. Ist wie in Fig. I die Bildebene senkrecht, so ist der Projektionsstrahl O P durch bestimmt, daß er

1) in der Ebene sich befindet, welche durch den Punkt O gehend den auf Seite 1 erwähnten parallepipedischen Raum in einem senkrechten Querschnitt schneidet,

2) daß er mit Grund- und Bildebene dieselben Neigungswinkel bildet. (45°)

Zwei solcher Linien kann man durch O legen, von denen die eine in Fig. I gezeichnet die Bildfläche in nem Punkte P' trifft, welcher unterhalb der Fluchtlinie f liegt. Die zweite mit O P gleichwertige Linie trifft e Bildebene in einem Punkte, welcher oberhalb f liegt.

Denken wir uns Punkt P als Scheitel eines beliebigen Winkels in der Ebene G, dessen Schenkel die inie c in den Punkten M und N schneiden, so wird Winkel M P N auf M P' N abgebildet. Die Dreiecke P N und M P' N sind aber als symmetrische Dreiecke congruent, also ist Winkel M P N = Winkel M P' N.

Also erhalten wir den Satz:

Jeder Winkel dessen Scheitel in P liegt, wird auf einen ihm gleichen Winkel, essen Scheitel in P' liegt, abgebildet.

Von besonderer Bedeutung sind die Punkte P und P' für die Beziehung auf Kegelschnitte. Nehmen ir an, es sei ein Kegelschnitt K in der Grundebene G, dessen Bild K' sei. P M, P N seien zwei Strahlen elche in Bezug auf K' conjugiert sind.

Drehen wir nun K' in die central collineare Lage hinein und bezeichnen den Kegelschnitt K' in derlben mit K'_0, so sind, da P' auf P fällt, die Richtungen P M, P N conjugierte Richtungen für beide Kegelschnitte K und K'_0. Derselbe Schluß läßt sich aber für jedes Paar conjugierter Richtungen durch P' in Bezug uf beide Kegelschnitte machen, also ist nach dieser Betrachtung für die Kegelschnitte K und K'_0 der Punkt P

derjenige Punkt, welchem in Bezug auf beide dieselbe Strahleninvolution zugehört. Zugleich ist derselbe, da in ihm der Punkt O hineingefallen ist, auch Collineationscentrum.

Über den weiteren Zusammenhang der bei zwei Kegelschnitten auftretenden doppelten Collineationsachsen und Collineationscentra wird in § 2 das Nähere gesagt. Hier möge nur noch darauf hingewiesen werden, daß wenn K und K_0' gegenseitig außerhalb einander fallen die Punkte P Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten sind.

Aus den Elementen der Perspektive ist auch folgender Satz bekannt:

Haben zwei Dreiecke eine central collinare Lage, und dreht man das eine um die Collineationsachse aus der gemeinsamen Ebene heraus, so existiert im Raume ein leicht zu ermittelndes Projektionscentrum P, aus welchem das eine Dreieck auf das andere perspektivisch abgebildet wird.

Derselbe Satz gilt auch für central collinear gelegene Polygone; es soll nun untersucht werden, ob dieser Satz auf Gültigkeit für central collinear gelegene Curven besitzt.

Wenden wir uns zur Betrachtung zweier krummen Linien l und l', welche in Grund- und Bildebene gelegen, durch ein in Raum liegendes Projektionscentrum O auf einander perspektivisch bezogen sind.

Sind A und A' zwei entsprechende Punkte dieser Curven, auf einem durch O gehenden Projektionsstrahl, so ist es ersichtlich, daß die in A' gezogene Tangente das Bild der in A gezogenen ist; beide Tangenten oder allgemein: Die an perspektivisch entsprechenden Punkten der Curven gezogenen Tangenten schneiden sich auf Punkten der Linie c.

Dreht man nun die Bildebene in die Grundebene hinein, bezeichnet die Curve l' in dieser Lage mit l'_0 (desgl. alle ihre Punkte), so haben l'_0 und l eine central collineare Lage, wie solche in Fig. II dargestellt ist

Je zwei entsprechende Punkte der Curven l und l'_0 wie A und A'_0 liegen auf einem Projektionsstrahl, welcher durch das Collineationscentrum P_0 geht, in welchen das frühere Projektionscentrum O hineinfällt. Je zwei bestimmte Punkte der Curven l, l'_0, A. A'_0, welche auf einem durch P'_0 gehenden Projektionsstrahl liegen, sind entsprechende oder homologe Punkte; die an je zwei homologe Punkte gezogenen Tangenten schneiden sich stets in einem Punkt der Collineationsachse c.

Es entsteht nun auch umgekehrt folgende Frage:

Existiert, wenn in einer Ebene 𝔈 zwei central collineare Curven l, l'_0 gegeben sind auch für den Fall, daß l'_0 um die Collineationsachse c aus der Ebene 𝔈 herausgedreht wird nun im Raume ein Projektionscentrum P, so daß l^1 als perspektivisches Bild von l betrachtet werden kann?

Die Existenz eines solchen Projektionscentrum P im Raume ergiebt sich aus folgender Betrachtung:

Es seien 2 Curven l, l'_0 in derselben Ebene gegeben, welche auf einander central collinear bezogen sind. Dann finden zwischen l und l'_0 folgende Beziehungen statt

1., Jedem Punkt x der einen Curve entspricht ein Punkt x_0 der andern und umgekehrt, derartig daß

2., alle durch je zwei entsprechende Punkte x x'_0, bestimmten Linien sich in einem festen Punkte P_0 schneiden, und daß

3., die Tangenten an x und x^0 sich auf einer festen Geraden c schneiden.

Es seien A, A' irgend zwei entsprechende Punkte beider Curven; a, a' die ihnen entsprechenden Tangenten, welche sich auf einen Punkt der Linie c schneiden.

Nun kann man, wie bekannt (vgl. Reye, Geometrie der Lage, 1. Auflage, Teil II Vortrag III) zwei in einer Ebene befindliche ebene Systeme oder Felder so central collinear auf einander beziehen, daß P_0 Centrum, c Achse der Collineation, A und A'_0 zwei entsprechende Punkte sind.

Durch diese Bedingungen ist die Collineation beider Systeme festgestellt. Jedem Punkt y des einen Systems entspricht ein Punkt y'_0 des andern derartig, daß die Gerade y y'_0 durch P_0 geht, und die Verbindungslinien y z des einen Systems und y'_0 z'_0 des andern Systems sich in einem Punkte der Linie c treffen.

Nach bekannter leicht auszuführender Construction kann dann zu jeder Figur des einen Systems die entsprechende des anderen Punkt für Punkt construiert werden.

Construieren wir demnach nach der eben vorausgesetzten central collinearen Beziehungen beider Systeme die l entsprechende Curve und nennen sie vorläufig λ'_0; alsdann ist zu beweisen, daß die nach bekannten Regeln construierte Curve λ'_0 mit der schon vorhandenen l'_0 identisch ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich aus folgendem Grunde:

Weil Curve l durch A geht und in der collinearen Beziehung beider Felder dem Punkt A der Punkt A'_0 entspricht, so geht λ'_0 durch A'_0.

Es seien B, B'_0 und $\mathcal{B}'_0$ die unendlich nahen Punkte an A, A'_0 auf den Curven l, l'_0 und λ'_0.

Alsdann schneiden sich nach der Voraussetzung der Lage beider Curven die Verbindungslinien der Punkte A B, A_0' B_0' (die Tangente in A und A'_0) in einem Punkte der Linie c In Folge der central collinearen Beziehung beider Felder schneiden sich aber auch A B und A'_0 $\mathcal{B}'_0$ auf einem (folglich demselben) Punkte der Linie c.

Also haben die Linien A'_0 B'_0 und A'_0 $\mathcal{B}'_0$ zwei Punkte 1) A'_0 und 2) einen Punkt auf c (den Schnittpunkt von A B und c) gemeinsam; mithin sind A'_0 B'_0 und A'_0 $\mathcal{B}'_0$ identisch.

Ferner ist Punkt B'_0 identisch mit $\mathcal{B}'_0$. Denn jeder liegt auf einer durch B P_0 bestimmten Geraden. Und zwar Punkt B'_0 nach Voraussetzung der Lage beider Curven l l'_0, Punkt $\mathcal{B}'_0$ in Folge der collinearen Beziehung beider Felder.

Da also die Punkte B'_0 und $\mathcal{B}'_0$ als Schnittpunkte zweier zusammenfallender Paare von Geraden anzusehen sind, so ergiebt sich daraus die Identität von B'_0 und $\mathcal{B}'_0$.

Ebenso führt man successiv den Nachweis, daß die übrigen entsprechenden unendlich nahen Punkte der Curve l'_0 λ'_0 identisch sind, und ergiebt sich hieraus überhaupt daß Curve l'_0 identisch ist mit Curve λ'_0.

Seien ferner x, y, z irgend drei Punkte des einen Feldes, welche ein Dreieck bilden, gleichgiltig ob sie an Curve l liegen oder nicht.

Dann entsprechen in Folge der collinearen Zuordnung der Felder den Punkten x, y, z die Punkt x'_0, y'_0, z'_0.

Die Punkte x y z und x'_0 y'_0 z'_0 bilden zwei perspektivische Dreiecke.

Dieselben sind derartig gelegen daß 1) die Verbindungslinien entsprechender Punkt x x'_0, y y'_0, z z_0, durch einen Punkt P_0 gehen, und

2) die Linienpaare x y und x'_0 y'_0
x z und x'_0 z'_0
z y und z'_0 y'_0

sich in drei auf c liegenden Punkten schneiden.

Dreht man das Feld des Dreiecks x'_0 y'_0 z'_0 um c als Achse aus der Ebene des Dreiecks x y z heraus, so werden sich stets die Verbindungslinien x x', y y', z z' in einem Punkte P im Raume schneiden.

Dieser Punkt P ist der Schnittpunkt der drei Ebenen, welche durch die drei sich in c schneidenden Linienpaare bestimmt werden.

(Vgl. Cremona, Eléments de géométrie projective traduits par Dewulf § II.)

Nun nehme man die beiden Punkte x y auf Curve l als fest an; ihnen entsprechen alsdann die Punkte x' y' der Curve l'; die Linien x x' und y y' schneiden sich nach soeben angestellter Betrachtung in einem Punkte des Raumes P.

Nimmt man nun z auf der Curve l liegend an, so entspricht dem Punkte z auf l ein bestimmter

Punkt z' auf l', und nimmt man ferner z als veränderlich an und läßt z die ganze Curve l durchlaufen, so durchläuft z' die Curve l' derartig, daß die Gerade z z' durch den schon bestimmten Punkt P hindurchgeht.

Also kann P als Projektionscentrum der Curven l und l' aufgefaßt werden.

Hieraus ergiebt sich also die Richtigkeit des Satzes:

Sind zwei Curven in einer Ebene auf einander central collinear bezogen, und dreht man die eine um die Collineationsachse aus der gemeinsamen Collineationsebene heraus, so existiert stets ein im Raume gelegenes Projektionscentrum, welches die nun in verschiedenen Ebenen befindlichen Curven auf einander perspektivisch bezieht.

In meiner Programmabhandlung habe ich in § 6 eine Methode angegeben, den Durchmesser dieses Kreises durch Verbindung seiner Durchschnittspunkte mit der Grundebene zu construieren.

Eine besondere Lage erhält die Collineationsachse zweier central collinear gelegenen Figuren, wenn sie identisch ist mit der unendlich fernen Geraden g_∞ der Grundebene. Man erhält zwei derartig central collinear gelegene Figuren dadurch, daß man die Collineationsachse c zweier central collinear gelegenen Figuren als Verschwindungslinie annimmt, und von irgend einem Punkt des Raumes die vorliegenden Figuren auf eine der Verschwindungsebene parallele Bildfläche projiciert.

Untersuchen wir jetzt die Beziehungen zweier central collinear gelegenen Figuren, wo g_∞ Collineationsachse ist.

Einer Drehung um g_∞ entspricht eine derartige Bewegung der einen Figur, daß sie sich parallel der Grundebene bleibend, aus derselben heraushebt. Jeder ihrer Punkte beschreibt eine senkrechte Linie zur Grundebene, welche als Kreisbogen eines Kreises mit unendlich großem Radius aufzufassen ist. Eine gleiche Linie beschreibt auch der Projektionsmittelpunkt; seine Bahnlinie steht senkrecht auf der festen Grundebene im ursprünglich angenommenen Collineationscentrum.

Da aber nach Drehung um g_∞ beide Figuren in den nun parallelen Ebenen durch ein im Raum liegendes Projektionscentrum aufeinander perspektivisch bezogen sind, so müssen die Figuren ähnlich sein.

Denn sie sind aufzufassen als Durchschnittsfiguren paralleler Ebenen mit einem Kegel resp. Pyramide, dessen Spitze das Projektionscentrum bildet.

Demnach ergiebt sich der bekannte Satz:

Zwei central collinear gelegene Figuren, deren Collineationsachse die unendlich ferne Gerade g_∞ bildet, sind ähnliche Figuren.

Das Collineationscentrum wird in diesem Falle zum Ähnlichkeitspunkt.

§ 2. Collineare Zuordnung zweier Kreise. Zusammenhang der beiden Collineationscentra und Collineations Achsen zweier Ellipsen aus räumlicher Betrachtung abgeleitet.

Um die central collineare Zusammengehörigkeit zweier Kreise mit ungleichen Radien in nicht concentrischer Lage zu betrachten, weisen wir auf folgenden bekannten Satz hin:

In allen Lagen zweier Kreise K_1 und K_2 existieren 2 Ähnlichkeitspunkte, ein äußerer P_1, ein innerer P_2; ferner die Chordale c, der Ort der gleichen Potenzen, und die unendlich ferne Gerade g_∞, welche für projektivische Beziehungen beider Kreise gleichwertig mit c ist.

Zieht man nun durch einen der Ähnlichkeitspunkte einen Projectionsstrahl, welcher K_1 in A_1 und B_1, und K_2 in A_2 und B_2 schneidet, sind ferner A_1, A_2 und B_1, B_2 homologe Punkte, so sind die in A_1 und A_2 einerseits und die in B_1 und B_2 andrerseits an die Kreise gelegten Tangentenpaare parallel, d. h. sie schneiden sich auf g_∞; desgl. alle in homologe Punkte gelegten Tangentenpaare.

Die Kreise sind auf einander central collinear bezogen mit g_∞ als Collineationsachse und dem einen oder andern Ähnlichkeitspunkte P_1 und P_2 als Collineationscentrum.

Hebt man den einen Kreis parallel aus der Grundebene, so existieren im Raume darnach zu der einen Collineationsachse g_∞ zwei Projektions Centra.

Das eine Centrum projiciert auf einander die homologen Punkte des äußeren, das andere Centrum die homologen Punkte des inneren Ähnlichkeitspunktes bei der ursprünglich angenommenen central collinearen Lage beider Kreise.

Ferner ist folgender Satz bekannt:

Die Tangenten an je 2 potenzhaltenden Punkten des äußeren oder inneren Aehnlichkeitspunktes auf einem Projectionsstrahl schneiden sich in irgend einem Punkt der Chordale c.

Also sind beide Kreise central collinear auf einander bezogen durch die Chordale c als Collineationsachse und durch den äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkt als Collineationscentrum.

Dreht man demnach den einen Kreis um die Chordale und Collineationsachse c aus der Collineations-Ebene, so existieren im Raume 2 Projektionscentra.

Das eine Centrum projiciert auf einander die potenzhaltenden Punkte des äußeren, das andere Centrum die potenzhaltenden Punkte des inneren Ähnlichkeitspunktes bei der ursprünglich angenommenen central collinearen Lage beider Kreise.

Demnach sind 2 Kreise in der Ebene bekanntlich auf 4fache Art auf einander central collinear zu beziehen und gestaltet sich die Übersicht mit Anwendung der angenommenen Bezeichnung auf folgende Weise:

	Collineationsachse.	Collineations-Centrum.	Zugeordnete Punkte.
1)	g_∞	P_1	homologe Punke von P_1
2)	g_∞	P_2	homologe Punkte von P_2
3)	c	P_1	potenzhaltende Punkte von P_1
4)	c	P_2	potenzhaltende Punkte von P_2.

In § 5 kommen diese 4 Fälle in Fig. VIII zur Anwendung.

Denken wir uns jetzt die in einer Ebene liegenden Kreise K_1 und K_2 durch ein Projektionscentrum auf eine andere Ebene projiciert, so erhalten wir zwei Kegelschnitte K'_1 und K'_2. Die Punkte P_1 und P_2 gehen über in die Punkte P'_1 und P'_2, welche ihre Eigenschaft als Ähnlichkeitspunkte verlieren, ihre Eigenschaften als Collineationscentra behalten.

Die Chordale c und g_∞ werden projiciert auf die Linie c' und g' und behalten letztere Linie ihre Eigenschaften als Collineationsachsen.

Demnach haben die beiden Kegelschnitte K_1' und K_2' 2 Collineationscentra, P_1' und P_2', und 2 Collineationsachsen c' und g'.

Wie die Kreise auf 4fache Weise central collinear auf einander bezogen werden konnten, so können in derselben Anordnung auch K_1' und K_2' auf 4fache Art auf einander central collinear bezogen werden.

Der Begriff der homologen Punkte eines durch das Collineationscentrum gehenden Projektionsstrahls bleibt bestehen; der Begriff der potenzhaltenden Punkte fällt dagegen fort.

Nehmen wir nun an, wir haben in einer Ebene zwei derartig central collinear gelegene Kegelschnitte C_1 und C_2, daß sie auf 2 Kreise einer Bildebene projiciert werden können; ihre Collineationscentra seien mit P_1, P_2 ihre Collineationsachsen seien mit c_1, c_2 bezeichnet.

Aus der 4fachen collinearen Beziehung folgt, daß C_1 und C_2 auf 4fache Weise aufeinander central collinear bezogen werden können.

Hierzu ist die Voraussetzung nothwendig, daß die betrachteten Kegelschnitte entweder 4 imaginäre oder

2 reelle und 2 imaginäre Schnittpunkte gemeinschaftlich haben. Andere Fälle kommen in vorliegender Abhandlung nicht zur Besprechung.

Unter diesen Bedingungen ergeben sich folgende Betrachtungen:

Dreht man C_1 um die eine Collineationsachse c_1 so existieren 2 Projektionscentra im Raume, welche auf verschiedene Weise die Punkte von C_1 und C_2 aufeinander perspektivisch beziehen.

Bei einer vollständigen Umdrehung des Kegelschnittes C_1 um c_1 beschreiben beide Projektionscentra Kreise, deren Ebenen senkrecht zu c_1 stehen und welche die Ebene von C_2 in 4 Punkten durchbohren, von denen zwei die Punkte P_1 und P_2, die Collineationscentra von C_1 und C_2 in der ursprünglichen Collineationsebene von C_2 sind.

Dasselbe findet statt, wenn man den Kegelschnitt C_1 um die zweite Collineationsachse c_2 dreht. Hier beschreiben bei vollständiger Umdrehung von C_1 um c_2 die beiden Projektionscentra, welche C_1 und C_2 aufeinander projicieren, zwei andere Kreise, deren Ebenenen senkrecht zur 2ten Collineationsachse c_2 stehen. Von den 4 Punkten, in welchem diese die ursprüngliche Grundebene von C_2 durchbohren, fallen ebenfalls ihrer zwei mit den Punkten P_1 und P_2 zusammen.

Diese 4 Kreise, welche bei der angenommenen Drehung von C_1 um beide Collineationsachsen c_1 und c_2 den Ort der Projektionscentra bilden, haben also eine solche Lage, daß sich ihrer je zwei in den Collineations-Centren P_1 und P_2 berühren. Denn sie haben in diesen Punkten eine gemeinsame Tangente, nämlich die in diesen Punkten auf die Ebene von C_2 errichtete Senkrechte.

Letztere Punkte sind daher jeder als ein Doppelpunkt, zwei Kreisen angehörend, aufzufassen, deren jeder den Ort eines Projektionscentrum bildet, welches in bestimmter Weise die Kegelschnitte auf einander bezieht.

Es möge hier folgende Bemerkung gemacht werden.

Ist von den beiden Collineations-Centren und beiden Collineationsachsen zweier Kegelschnitte ein Stück bekannt, so können die übrigen leicht gefunden werden. Ist z. B. nur ein Collineationscentrum gegeben, so zieht man von demselben einen Projektionsstrahl, welcher beide Kegelschnitte in 4 Punkten durchschneidet. Die Tangentenpaare an den 2 homologen Punktenpaaren schneiden sich in 2 Punkten, welche die eine betreffende Collineationsachse bestimmen.

Zur Bestimmung des zweiten Collineations-Centrum ziehe man von einem Punkte einer Collineationsachse 4 Tangenten an beide Kegelschnitte. Auf dem Schnittpunkte der Linienpaare, welche die homologen Berührungspunkte verbinden, liegen die betreffenden Collineationscentra.

Es ist übrigens noch darauf hinzuweisen, daß man bei der Bezeichnung „homolog" immer das Collineationscentrum und die Collineationsachse anzugeben hat, in Bezug auf welche die Punkte zweier Kegelschnitte homolog sind. Ziehen wir nämlich, nachdem wir ein Collineationscentrum und eine Collineationsachse einander zugeordnet haben, eine Sekante durch beide Kegelschnitte und das Collineationscentrum, so nennen wir diejenigen Schnittpunkte der Sekante in den verschiedenen Kegelschnitten homolog, deren Tangenten sich in der betreffenden schon vorher bestimmten Collineationsachse schneiden.

Nach dieser Bezeichnung hat man in 2 Kreisen z. B. die homologen Punkte des äußeren Ähnlichkeitspunktes anzusehen als „homologe Punkte des äußeren Ähnlichkeitspunktes und der unendlich fernen Geraden;" die potenzhaltenden Punkte des äußeren Ähnlichkeitspunktes als „homologe Punkte des äußeren Ähnlichkeitspunktes und der Chordale."

Der Zusammenhang zweier Projektionscentra zweier Kegelschnitte unter den oben vorausgesetzten Bedingungen ist aus folgender Betrachtung ersichtlich, welche in Bezug auf spätere Verwendung an zwei Ellipsen E und E′ (Fig. III) durchgeführt wird.

Es sei P_1 Projektionsmittelpunkt von E und E_1, c_1 sei die Schnittlinie der Ebenen beider Ellipsen.

Irgend eine Linie und ihr Pol in der Ebene von E werden derartig projiciert, daß ihre Projektionen in der Ebene von E' ebenfalls Pol und Polare in Bezug auf E' sind.

Die Linie c_1 als Durchschnittslinie von Grund- und Bildebene ist als ihr eigenes Bild anzusehen. Bezeichnet man den Pol von c_1 in Bezug auf E mit C_1, den in Bezug auf E' mit C_1', so liegen C_1 und C_1' in dem durch P_1 gehenden Projektionsstrahl.

Dieser Projektionsstrahl P_1 C_1 möge den Namen „Polachse" führen.

Durch diese Polachse legen wir eine beliebige Ebene, welche die Ebene von E längs der Sehne G H, die Ebene von E' längs der Sehne G' H' schneidet. Der Schnittpunkt der Ebene mit c_1 werde mit J bezeichnet.

Alsdann sind, da C_1 und C_1' Pole von c_1 in Bezug auf E und E_1 sind, G C H J und G' C' H' J 2 harmonische Punktreihen, welche einen Punkt J gemeinschaftlich haben und durch P_1 perspektivisch aufeinander bezogen sind.

Nach bekanntem Satze muß aber bei dieser Lage noch ein zweites Projektionscentrum vorhanden sein, welches beide harmonische Gebilde auf einander projiciert. Dasselbe liegt auf dem Durchschnitt der Verbindungslinien G' H und G H' außerdem auf der Linie C_1 C_1'. Wir bezeichnen es mit P_2.

Es ergiebt sich als Durchschnittsfigur ein vollständiges Vierseit mit Diagonalen, in welchem P_1 und P_2 harmonisch durch C_1 und C_1' getrennt sind.

Legen wir irgend eine andere Ebene durch die Polachse, so ändern sich wohl die Punkte G, G', H, H; unverändert bleiben C_1 C_1' und P_1; also auch der zu diesen drei harmonisch gelegene Punkt P_2.

Bei vollständiger Umdrehung der durch die Polachse gelegten Ebene durchläuft G und H, dsgl. G', und H' sämmtliche Punkte von E und E'; es ist also P_2 das zweite Projektionscentrum von E und E'.

Drehen wir jetzt E' um c_1 als Achse, so beschreiben die Projektionscentra der Curven E und E' Kreise, deren Ebenen senkrecht zu c_1 stehen.

Wenn nun E' in die Grundebene der Curve E gefallen ist, so haben beide Curven eine central collineare Lage; wir bezeichnen in dieser E_1 mit E^0; analog die übrigen Punkte mit dem Zeichen $_0$.

Collineationscentra von E und E^0 sind P_1^0 und P_2^0. Letztere Punkte sind diejenigen, in denen der Ort der Projektionscentra beider Curven bei der betreffenden Drehung um c_1 die Grundebene durchbohrt.

Dieselben sind nach § 1 zugleich diejenigen Punkte, welche für beide Curven E, E^0 dieselbe Involution conjugierter Strahlen haben.

Die Polachse ist übergegangen in die Verbindungslinie der Collineationscentra, und sind letztere harmonisch getrennt durch die Pole c_1 und c_1^0 der Collineationsachse c_1 in Bezug auf die Curven E und E^0.

Nun kann man nach der auf S. 11 angegebenen Weise leicht die zweite Collineationsachse c_2 finden.

Denken wir uns um diese die Curve E' in die soeben betrachtete Lage E^0 hineingedreht, so ergiebt sich aus denselben Schlüssen daß, wenn wir mit C_2 und C_2^0 die Pole von c_2 in Bezug auf E und E^0 bezeichnen, nun auch die Collineationscentra P_1^0 und P_2^0 harmonisch getrennt sind durch C_2 und C_2^0, die Pole der zweiten Collineationsachse.

Demnach liegen die beiden Collineationscentra und die 4 Pole beider Collineationsachsen in Bezug auf beide Kegelschnitte in einer Geraden, und gehören diese 6 Punkte einer gewissen Involution von Punkten auf dieser Geraden an.

Doppelpunkte der Involution sind die Collineationscentra; involutorisch gepaart sind zwei Pole einer Collineationsachse an beiden Curven.

Da die Linie, welche den Träger dieser Involution bildet, durch die Punkte C_1 und C_1^0 wie durch C_2 und C_2^0 geht, so liegt ihr Pol in Bezug auf beide Kegelschnitte auf Linie c_1 und c_2, d. h. auf dem Schnittpunkt beider Collineationsachsen.

Letzterer Punkt ist also einer der Punkte, welcher für beide Kegelschnitte dieselbe Polare, die Verbindungslinie der Collineationscentra beider Kegelschnitte, besitzt. (S. Chasles, Traité des sections coniques § 320 a E.)

B. Vorbereitende Sätze für Abschnitt II.

§ 3. Erklärung und Untersuchung des involutorischen Sechsecks.

Bei der Untersuchung des Feuerbachschen Kreises tritt ein eigenthümliches Sechseck auf, welches die Merkmale des Pascal'schen und Brianchon'schen Sechsecks in sich vereinigt. Wegen der bei näherer Untersuchung sich ergebenden involutorischen Beziehungen soll dasselbe als „Involutorisches Sechseck" bezeichnet werden.

Wir untersuchen zunächst die hauptsächlichen Beziehungen, welche sich bei Betrachtung eines involutorischen Sechsecks ergeben, wie es in dieser Untersuchung auftritt. Fig. IV.

Angenommen A B C D E F sei ein involutorisches Sechseck, so liegen die Eckpunkte auf einem Kegelschnitt K, und die Verbindungslinien zweier gegenüberliegenden Ecken AD, BE, FC schneiden sich dann in einem Punkt S. Man erhält ein solches involutorisches Sechseck am leichtesten dadurch, daß man innerhalb eines gegebenen Kegelschnittes K einen Punkt S annimmt, durch diesen drei beliebige Sehnen legt, deren 6 Endpunkte die Eckpunkte des involutorischen Sechsecks bestimmen.

Wir bezeichnen in diesem Sechseck die drei sich in Punkt S schneidenden Diagonalen als Diagonalen 2ter Ordnung; die Linien aber, welche einen Eckpunkt um den andern wie A und C oder A und E verbinden, als Diagonalen erster Ordnung; von letzteren sind 6 vorhanden, deren je drei die beiden sich durchdringenden Dreiecke A C E und B F D bilden.

Es ergiebt sich nun folgender Satz, wenn wir die Schnittpunkte der Linien B C und F E durch (B C, F E), analog die übrigen Punkte bezeichnen:

Auf derjenigen Pascalschen Geraden, auf welcher sich je zwei gegenüberliegende Seiten des involutorischen Sechsecks in drei Punkten schneiden, liegen auch die drei Schnittpunkte von je 2 Diagonalen 1ter Ordnung. Diese 6 Schnittpunkte bilden eine Involution und zwar sind involutorisch gepaart: (A B, D E) (A E, B D), (B C, F E) (B F, C E), (C D, A F) (A C, F D).

Der Träger dieser Involution ist die Polare des Punktes S in Bezug auf den Kegelschnitt K.

Zum Beweise dieses Satzes benutzen wir den in dem Steiner-Schröterschen Werke § 30, erste Auflage angeführten Satz:

Das Diagonal-Dreieck eines dem Kegelschnitt einbeschriebenen Vierecks ist immer ein Tripel conjugierter Punkte und Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt.

Demnach bilden in dem Viereck A C D F die Punkte S, (A C, F D) und (A F, C D) ein solches Tripel.

Also ist die Verbindungslinie der Punkte (A F, C D) und (A C, F D) die Polare von S, und benannte Schnittpunkte selbst sind auf dieser Polaren conjugierte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt K. Sie sind also zwei involutorisch gepaarte Punkte der Involution, welche Kegelschnitt K auf der Polare von S induciert.

Ebenso wie sich aber ergeben hat durch Betrachtung des Vierecks A C D F, daß (A C, D F) und (A F, C D) auf der Polaren von S liegen und involutorisch gepaarte Punkte der auf derselben von K inducierten Involution sind, folgt aus Betrachtung des Vierecks B F E C dasselbe Resultat für die Punkte (B C, E F) und (B F, C E) und aus Betrachtung des Vierecks A B D E das gleiche Ergebnis für die Punkte (A B, D E) und (B D, A E).

Diese 6 Punkte sind demnach in der angegebenen Weise involutorisch auf der Polaren von S gepaart, welche zugleich die Pascalsche Linie der Gegenseiten des Sechsecks A B C D E F bildet.

Man kann nun diesen Satz in verschiedenen Umkehrungen aussprechen, von denen eine noch durchgenommen werden möge:

Schneiden sich in einem Sechseck A B C D E F je zwei gegenüberliegende Seitenpaare wie (A B, D E) (B C, E F), (C D, A F) auf einer Geraden, und desgleichen die gegenüberliegenden Diagonalpaaren 1ter Ordnung, wie (A E, B D), (B F, C E), (A C, F D), welche die Endpunkte dieser Seiten verbinden, ebenfalls auf einer Geraden, so fallen diese beiden Geraden zusammen. Auf dieser einen Geraden bilden die erwähnten 6 Schnittpunkte eine Involution, und das Sechseck A B C D E F ist ein involutorisches Sechseck.

Der Beweis ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

In Folge der ersten Bedingung, daß sich die gegenüberliegenden Seitenpaare wie A B, D E ꝛc. in drei auf einer Graden liegenden Punkten schneiden, wird ein gewisser Kegelschnitt K bestimmt durch die 6 Eckpunkte A, B, C, D, E, F.

Durch die zweite Bedingung, daß sich die 3 gegenüberliegenden Diagonalenpaare erster Ordnung wie B F und C E in drei auf einer Graden liegenden Punkten schneiden, sind zunächst die Dreiecke F B D und A C E central collinear auf einander bezogen, da die 3 Schnittpunkte je zweier entsprechenden Seiten auf einer Geraden liegen. Also existiert ein Collineationscentrum. Man erhält letzteres als Durchschnittspunkt der Verbindungslinien entsprechender Punkte F und C, B und E, A und D.

Diese Verbindungslinien, welche sich also in einem Punkt S schneiden müssen, sind aber im Sechseck A B C D E F die Diagonalen zweiter Ordnung, also ist dieser Fall auf den ersten zurückgeführt.

Mithin fallen die beiden Geraden, in welcher einerseits die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seitenpaare, andererseits die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Diagonale zweiter Ordnung des Sechsecks A B C D E F liegen, in eine Gerade zusammen, nämlich in die Polare des Punktes S in Bezug auf den Kegelschnitt K.

§ 4. Untersuchung und Lösung der Aufgabe:

Gegeben ein Dreieck A B C und zwei Punkte P_1 und P_2.

Wann und wie kann Dreieck A B C derartig auf ein Dreieck A′ B′ C′ projiciert werden, daß von den Punkten P_1 und P_2 der eine auf den Höhenschnittpunkt, der andere gleichzeitig auf den Schwerpunkt des projicierten Dreiecks abgebildet wird?

Bevor wir nun an die Betrachtung und Untersuchung des Feuerbachschen Kreises selbst herantreten, möge der Gang derselben angegeben und auf die nothwendige Beantwortung der hierbei sich aufwerfenden Fragen hingewiesen werden.

Charakteristisch für den Feuerbach'schen Kreis und seine Beziehungen zum umschriebenen Kreise des Dreiecks sind 2 Systeme von drei Transversalen, welche sich zu je dreien in einem Punkt schneiden, nämlich das System der drei Höhen und das System der drei Mittellinien. Wir bezeichnen den Höhenschnittpunkt mit P_1, den Schnittpunkt der Mittellinien mit P_2.

Projiciert man nun das Dreieck mit seinen Transversalen, dem Feuerbach'schen und dem umschriebenen Kreise, so erhält man ein Dreieck mit zwei gleichwertigen Systemen von Transversalen, welche sich in 2 Punkten P_1' und P_2' schneiden; der Feuerbach'sche Kreis und der umschriebene Kreis werden in Kegelschnitte projiciert.

Mittelst der Perspektive lassen sich nun gewisse Beziehungen, welche zwischen diesen beiden Kegelschnitten und den beiden Systemen von Transversalen stattfinden, feststellen. Diese gelten zunächst für ein Dreieck, wo wir das eine Transversalen-System als Projektion der Mittellinien, das andere Transversalensystem als Projektion der Höhen eines anderen Dreiecks ansehen können.

Sollen die für diesen speziellen Fall abgeleiteten Resultate aber allgemeine Gültigkeit haben, so ist zunächst folgende Frage zu beantworten:

Wenn in einem Dreieck zwei Systeme von drei Transversalen, welche durch einen Punkt gehen, gegeben sind, wie und wann kann man das Dreieck so projicieren, daß in dieser Projektion das eine System von Transversalen auf die Höhen und zugleich das andere Transversalensystem auf die Mittellinien des projicierten Dreiecks abgebildet wird?

Die Beantwortung teilen wir in folgende drei Teile:

I. Gegeben ein Dreieck A B C und ein Punkt P_1.

Wie kann das Dreieck A B C derartig projiciert werden, daß im projicierten Dreieck A' B' C' der Punkt P_1' zum Höhenschnittpunkt wird?

II. Gegeben ein Dreieck A B C und ein Punkt P_2.

Wie kann ein Dreieck A B C derartig projiciert werden, daß im projicierten Dreieck A' B' C' Punkt P_2' zum Schwerpunkt wird?

III. Gegeben ein Dreieck A B C und zwei Punkte P_1 und P_2.

Wie und wann kann Dreieck A B C derartig projiciert werden, daß im projicierten Dreieck A' B' C' P_1' auf den Schnittpunkt der Höhen und gleichzeitig P_2' auf den Schnittpunkt der Mittellinien projiciert wird?

Untersuchung der Aufgabe I. (Fig. V.)

Gegeben ein Dreiecck A B C und ein Punkt P_1. Es ist Dreieck A B C so zu projicieren, das für A' B' C' Punkt P_1 Schnittpunkt der Höhen wird.

Auflösung.

Man betrachte die 4 Punkte A B C P_1 als Eckpunkte eines vollständigen Vierecks, und wähle irgend eine Linie c_1, welche von den 6 Seiten dieses Vierecks in einer elliptischen Involution geschnitten wird, als Verschwindungslinie. Nach Fig. V. sind involutorisch gepaart die Punkte S_1 Σ_1, S_2 Σ_2, S_3 Σ_3.

Darauf construiere man den Ortskreis desjenigen Punktes im Raume, von dem aus die involutorischen Punktenpaare unter rechten Winkeln gesehen werden.

In demselben nehme man einen Punkt O seiner Peripherie als Projektionscentrum an, und projiciere Dreieck A B C und P_1 auf eine Bildebene, welche parallel der durch O und c_1 gelegten Verschwindungsebene ist.

Im projicierten Dreieck A' B' C' ist alsdann P_1' Höhenschnittpunkt.

Beweis.

Die Durchschnittskante der die Seite A C projicierenden Ebene mit der Verschwindungsebene ist Linie O S_3; also A' C' $\parallel$ O S_3.

Die Durchschnittskante der die Seite B P_1 projicierenden Ebene mit der Verschwindungsebene ist O Σ_3; also B' P_1' $\parallel$ O Σ_3.

Da Punkt O derartig angenommen ist, daß

$O\ S_3$ senkrecht zu $O\ \Sigma_3$, muß auch
$A_1'\ C_1'$ senkrecht zu $B_1'\ P_1'$ und analog
$A_1'\ B_1'$ senkrecht zu $C_1'\ P_1'$
$B_1'\ C_1'$ senkrecht zu $A_1'\ P_1'$ sein.

Also ist P_1' Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A'\ B'\ C'$.

Das Kriterium, ob die Involution, in welcher eine Gerade von den Gegenseiten eines Vierecks geschnitten wird, elliptisch oder hyperbolisch ist, lautet nach „Steiner-Schröter, Theorie der Kegelschnitte" § 18:

Liegen die 4 Punkte, welche die 4 Ecken eines vollständigen Vierecks bilden, so daß einer von denselben (wie in Fig. V P_1) innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet, so ist die Involution, in welcher eine Gerade von den Gegenseiten des Vierecks geschnitten wird eine elliptische, wenn zu beiden Seiten der Geraden eine gerade Anzahl Eckpunkte des Vierecks liegt.

Die Involution ist dagegen hyperbolisch, wenn eine ungerade Anzahl Eckpunkte zu beiden Seiten der Geraden liegt.

Liegen dagegen die vier Eckpunkte so, daß jeder außerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet, so tritt das umgekehrte Verhältnis ein.

Aufgabe II.

Gegeben ein Dreieck $A\ B\ C$ und ein Punkt P_2. Es ist $A\ B\ C$ so zu projicieren, daß im projicierten Dreieck $A'\ B'\ C'$ Punkt P'_2 zum Schnittpunkt der Mittellinien wird.

Auflösung Fig. VI.

Man nehme Punkt P_2 als Collineationscentrum eines dem Dreieck $A\ B\ C$ central collinear gelegenen Dreiecks $A_2\ B_2\ C_2$ an, dessen Ecken in die Seiten des Dreieck $A\ B\ C$ fallen. Alsdann construiere man die die Collineationsachse c_2 der Dreiecke $A\ B\ C$ und $A_2\ B_2\ C_2$.

Nimmt man nun irgend einen Punkt im Raume O als Projektionscentrum, c_2 als Verschwindungslinie an, und projiciert auf irgend eine Bildebene, welche parallel der durch O und c_2 bestimmten Verschwindungsebene ist, das Dreieck $A\ B\ C$ vom Punkte O aus, so wird für das projicierte Dreieck $A'\ B'\ C'$ Punkt P'_2 Schnittpunkt der Mittellinien.

Beweis.

Nehmen wir an, Punkt P_2 befände sich wie in Fig VI zunächst innerhalb des Dreiecks $A\ B\ C$. Wo sich auch P_2 befinden möge, es bildet Punkt

A_2 den Schnittpunkt der Linien $B\ C$ und $A\ P_2$,
B_2 „ „ „ „ $A\ C$ „ $B\ P_2$,
C_2 „ „ „ „ $A\ B$ „ $C\ P_2$.

Die Collineationsachse c_2 der Dreiecke $A\ B\ C$ und $A_2\ B_2\ C_2$ geht durch die Schnittpunkte der Seiten

$A\ B,\ A_2\ B_2,$
$B\ C,\ B_2\ C_2,$
$A\ C,\ A_2\ C_2,$

Wird nun c_2 als Verschwindungslinie angenommen, so fallen die drei Schnittpunkte dieser drei Seitenpaare in's Unendliche; also

$$A' B' \parallel A'_2 B'_2,$$
$$B' C' \parallel B'_2 C'_2,$$
$$A' C' \parallel A'_2 C'_2.$$

Dreieck $A' B' C'$ ist ähnlich $A'_2 B'_2 B'_2$; das Collineationscentrum P'_2 dieser ähnlichen Dreiecke ist der Schwerpunkt.

Betrachten wir nun den Zusammenhang der Lage von P_2 für alle Punkte der Ebene des Dreiecks $A B C$ mit der Lage von c_2.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Linien $A B$ und $A_2 B_2$ mit Γ_2, so folgt, da in der betrachteten Projektion, wo c_2 Verschwindungslinie ist, $A' C_2' = C_2' B'$ ist und Γ_2' ins Unendliche fällt, daß

Γ_2 A C_2 B vier harmonische Punkte sind.

Bezeichnen wir analog den Durchschnitt

von $B C$ und $B_2 C_2$ mit $\varDelta_2$,

„ $A C$ und $A_2 C_2$ mit B_2, so

folgt, daß wir folgende drei harmonische Punktreihen haben

1) Γ_2 A C_2 B,

2) $\varDelta_2$ C A_2 B,

3) B_2 A B_2 C.

Die Punkte Γ_2, $\varDelta_2$, B_2, welche auf c_2 liegen, befinden sich auf den verlängerten Seiten des Dreiecks $A B C$, so lange die Punkte C_2, A_2, B_2 sich auf den Seiten des Dreiecks $A B C$ befinden.

Letzteres findet statt, so lange P_2 sich innerhalb der Dreiecksfläche $A B C$ befindet. Wir erhalten also das Resultat:

Liegt P_2 innerhalb des Dreiecks $A B C$, so liegt c_2 außerhalb desselben.

Nun nehmen wir an, Punkt P_2 bewege sich auf der Linie $C P_2$ nach der Spitze zu. Da C_2 unverändert bleibt, so bleibt auch der ihm in Bezug auf A und B harmonisch zugeordnete Punkt Γ_2 unverändert, durch welchen also die zu P_2 gehörige Linie c_2 geht.

Einer gradlinigen Bewegung des Punktes P_2 in der Richtung der Linie $P_2 C$ entspricht also eine Drehung der Linie c_2 um den festen Punkt Γ_2.

Nun nehmen wir an, es sei jetzt P_2 in den Scheitelwinkel des Dreieckswinkel C übergegangen in die Lage P_2^*. Dann ist das zu $A B C$ central collinear gelegene Dreieck das mit $A_2^* B_2^* C_2$ bezeichnete.

Linie c_2 ist übergegangen in die Collineationsachse c_2^*.

Da in dieser Lage die Punkte A_2^* B_2^* sich außerhalb der endlichen Strecken der Dreiecksseiten befinden, sind die ihnen harmonisch zugeordneten innerhalb derselben gelegen; also geht die durch Γ_2, B_2, $\varDelta_2$ bestimmte Collineationsachse c_2^* durch die Fläche des Dreiecks $A B C$ hindurch. Dasselbe findet statt, wenn Punkt P_2 sich in dem mit II^* bezeichneten Flächenraum befindet.

Hieraus folgt:

Befindet sich Punkt P_2 außerhalb des Dreiecks $A B C$, so geht die zugehörige Collineationsachse durch die Fläche des Dreiecks hindurch.

Wird nun die Linie c_2^* als Verschwindungslinie angenommen, so wird nicht das Dreieck $A B C$ auf einen im Endlichem zusammenhängenden Raum $A' B' C'$ projiciert, sondern die mit II und II^* bezeichneten Außenräume, welche in der Grundebene durch die unendlich ferne Grade $g\infty$ zusammenhängend sind, werden auf den Innenraum des Dreiecks $A' B' C'$ projiciert.

Dann liegt auch innerhalb desselben Punkt P_2'. Daß derselbe Schnittpunkt der Mittellinien ist, wird ganz ebenso wie im ersten Falle bewiesen.

Durchläuft nun P_2 die unendliche Linie C C_2, so entspricht jeder Lage von P_2 ein bestimmter Strahl eines Büschels, dessen Mittelpunkt Γ_2 ist, als zugehörige Collineationsachse c_2.

Nun nehmen wir an, Punkt C_2 durchlaufe die durch A und B bestimmte unendliche Linie. Dann entspricht jeder Lage des Strahles C C_2 in dem Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt C ein ganz bestimmter Punkt Γ_2 auf Linie A B. Und zwar ist Γ_2 harmonisch von C_2 durch A und B getrennt. Hat also Strahl C C_2 sich um C vollständig herumgedreht, so hat Γ_2 die ganze unendliche Linie A B durchlaufen.

Jedem Punkte P_2 irgend eines Strahles des Büschels um C entspricht eine ganz bestimmte Linie c_2 als Strahl eines Büschels mit dem Mittelpunkt Γ_2, welcher letztere durch die Lage des Strahls C C_2 bestimmt wird.

Nun bestimmt aber ein beliebiger Punkt P_2 der Ebene des Dreiecks A B C einen bestimmten Strahl P_2 C des Büschels um C. Diesem bestimmten Strahl entspricht ein bestimmter Büschelmittelpunkt Γ_2 auf Linie A B. Der Lage des Punktes P_2 auf dem erst angenommenen Strahl des Büschels um C entspricht ein bestimmter Strahl des Büschels um Γ als Collineationsachse c_2.

Aus dieser Untersuchung ergiebt sich das Resultat:

Sind die drei Eckpunkte eines Dreiecks A B C und ein Punkt P_2 in der Ebene desselben gegeben (so daß P_2 nicht auf die Seiten resp. deren Verlängerung fällt), so existiert eine bestimmte Linie c_2, welche als Verschwindungslinie angenommen es bewirkt, daß von einem Punkt O des Raumes der Punkt P_2' zum Schnittpunkt der Mittellinien des Dreiecks A' B' C' in einer Bildfläche wird, welche parallel der durch O und c_2 bestimmten Verschwindungsebene ist.

Fällt P_2 innerhalb der Fläche des Dreiecks A B C, so schneidet c_2 die Seiten außerhalb der Dreiecksfläche; fällt P_2 außerhalb der Fläche des Dreiecks, so durchschneidet c_2 die Fläche des Driecks; in der Bildebene werden dann zwei Dreiecksflächen, welche in der Grundebene durch die unendlich ferne Grade zusammenhängen, zu einer im Endlichen zusammenhängenden Dreiecksfläche A' B' C' vereint.

Im Folgendem soll Linie c_2 mit dem schon eingeführten Ausdruck der „harmonischen Graden" des Punktes P_2 in Bezug auf das Dreieck A B C bezeichnet werden. Demnach existiert für jeden Punkt der Ebene des Dreiecks eine zu ihm gehörige harmonische Grade.

Nun wenden wir uns zur Beantwortung der dritten Aufgabe:

Aufgabe III.

Gegeben ein Dreieck A B C und 2 Punkte P_1 und P_2 in seiner Ebene. Es ist P_1 auf den Höhenschnittpunkt, P_2 gleichzeitig auf den Schwerpunkt des Dreiecks A' B' C' zu projicieren.

Auflösung.

Wir nehmen zunächst an, die Punkte P_1 und P_2 befinden sich innerhalb einer Dreiecksfläche A B C.

Alsdann construiren wir die zu P_2 gehörige harmonische Grade c_2. Diese fällt außerhalb der Dreiecksfläche; wird also von den Seiten des durch die Punkte A B C P_1 bestimmten vollständigen Vierseit in einer elliptischen Involution geschnitten. Hierauf construiere man den Ortskreis des Punktes, von welchem die zugehörigen Punktenpaare unter rechten Winkeln gesehen werden, und nehmen einen Punkt O der Peripherie als Projektionscentrum an. Alsdann projiicert O auf eine Bildfläche, welche parallel der durch O und c_2 bestimmten

Verschwindungsebene ist, das Dreieck A B C derartig auf A′ B′ C′, daß P_1' Höhenschnittpunkt — nach Aufgabe I — und gleichzeitig P_2' Schnittpunkt der Mittellinien nach Aufgabe II wird.

Wir hätten ebenso aber auch die zu P_1 gehörige harmonische Gerade c_1 construieren können und dann mittelst derselben analog P_1 in den Schnittpunkt der Mitteltransversalen, P_2 als Höhenschnittpunkt des Dreiecks A′ B′ C′ projicieren können.

Denn c_2 fällt außerhalb der Dreiecksfläche A B C, wird also von den Seitenpaaren des durch die Punkte A B C P_2 gebildeten Vierecks in einer elliptischen Involution geschnitten.

Anders gestaltet sich die Lösung, wenn P_1 und P_2 in getrennten Räumen liegen. Zunächst ist ersichtlich, daß wenn Höhenschnittpunkt und Schnittpunkt der Mittellinien in getrennten Flächen des projicierten Dreiecks A′ B′ C′ vorkommen, nur der Schnittpunkt der Höhen außerhalb des Dreiecks A′ B′ C′ liegen kann; in diesem Fall ist das Dreieck A′ B′ C′ ein stumpfwinkliges.

Ob ein solches überhaupt gebildet werden kann, läßt sich aus dem Anblick der Lage der Punkte P_1 und P_2 noch gar nicht bestimmen. Hierzu muß man erst die zu P_1 und P_2 zugehörigen harmonischen Geraden c_1 und c_2 construieren, und dann zusehen ob und welche von denselben von den Seiten des aus A B C und P_1 resp. P_2 gebildeten vollständigen Vierecks in einer elliptischen Involution geschnitten wird. Wird gleichzeitig

c_1 von den Seiten des Vierseits A B C P_2 und
c_2 „ „ „ „ „ A B C P_1

in einer hyperbolischen Involution geschnitten, so ist die Lösung der Aufgabe unmöglich.

Es kann aber vorkommen, daß eine Involution elliptisch, die andere hyperbolisch ist, dann kann man nur die eine Linie, welche in einer elliptischen Involution geschnitten wird, als Verschwindungslinie annehmen.

Dann wird, wie schon erwähnt, Dreieck A′ B′ C′ ein stumpfwinkliges, weil die Schnittpunkte der Höhen und Mittellinien in getrennte Räume fallen.

In Bezug auf letzteren Fall ist am Schlusse dieses Abschnitts noch eine Bemerkung zu machen, welche im nächsten Theil zur Verwendung kommt.

Nehmen wir an, es sei ein Dreieck A B C gegeben und Punkt P_1 läge im Scheitelwinkel von C, Punkt P_2 läge im Innern des Dreiecks. Wir nehmen ferner an, die zu P_2 gehörige harmonische Gerade c_2 würde von den Seiten des durch die Punkte A B C P_1 bestimmten Vierecks in einer elliptischen Involution geschnitten. Alsdann kann man A B C auf ein stumpfwinkliges Dreieck A′ B′ C′ abbilden, wo der außerhalb desselben liegende Punkt P_1' Schnittpunkt der Höhen, der innerhalb desselben liegende Punkt P_2' Schnittpunkt der Mittellinien wird.

Betrachten wir nun aber, statt A B C als Dreieckspunkte, P_1 und P_2 als Transversalenschnittpunkte anzunehmen, A, B, P_1 als Dreieckspunkte, C und P_2 als Transversalenschnittpunkte, so liegen letztere innerhalb des Dreiecks A B P_1; also existieren für diese Gruppierung wiederum 2 Linien als Verschwindungslinien, mittelst deren man im Dreieck A B P_1 die Punkte P_2 und C gleichzeitig abwechselnd, den einen als Höhenschnittpunkt, den andern als Schwerpunkt des Dreiecks A′ B′ P_1' projicieren kann.

In jedem spitzwinkligen Dreieck um wie z. B. in A′ P_1' B′, innerhalb dessen C′ Höhenschnittpunkt ist, sind die Punkte A′ B′ C′ P_1' derartig gelagert, daß jeder von ihnen der Höhenschnittpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist.

Haben die Punkte A, B, P_1 eine derartige Lage, daß in dem projicierten spitzwinkligen Dreieck A′ P_1' B′ Punkt C′ der Höhenschnittpunkt ist, so können die um eine gemeinschaftliche Spitze C′ lagernden Dreiecke A′ B′ C′, A′ P_1' C′, B′ P_1' C′ als „Teildreiecke“ des Hauptdreiecks A′ P_1' B′ aufgefaßt werden.

Ist ein stumpfwinkliges Dreieck A′ B′ C′ gegeben, so können die übrigen leicht zu konstruierenden stumpfwinkligen Dreiecke B′ P_1′ C′ und A′ P_1′ C′ als „Ergänzungs-Dreiecke" des umschließenden Dreiecks A′ B′ P_1′ aufgefaßt und bezeichnet werden.

Um nach dieser Untersuchung zu einem bestimmten abschließenden Satze zu gelangen, führen wir die von Staudt in seinem Werke „Die Geometrie der Lage" § 13 angewendete Bezeichnung ein.

Nach derselben theilen drei Grade in einer Ebene, welche sich nicht in einem Punkte schneiden, die Ebene in ein eigentliches Dreieck I — bezeichnet mit A B C, und in drei uneigentliche Dreiecke II, III, IV (Fig. 7). Demnach bilden die in Fig. 6 mit II und II* bezeichneten Räume zusammen ein uneigentliches Staudt'sches Dreieck: II.

Die beiden Flächen eines uneigentlichen Staudt'schen Dreiecks hängen durch die unendlich ferne Grade zusammen. Es wird nun nach Staudt bezeichnet:

Dreieck I durch A B C,
„ II „ A B. C,
„ III „ A C. B,
„ IV „ B C. A.

Nun kann man mit Bezug auf diese Bezeichnungsweise folgenden Satz aussprechen:

Befinden sich innerhalb eines der Staudt'schen Dreiecke I, II, III, IV zugleich die beiden Punkte P_1 und P_2, so kann man die Figur auf doppelte Weise auf ein Dreieck A′ B′ C′ derartig projicieren, daß einmal P_1 zum Höhenpunkt, P_2 zum Schwerpunkt, das andere Mal P_1 zum Schwerpunkt, P_2 zum Höhenpunkt des projicierten Dreiecks A′ B′ C′ wird.

Der Beweis ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Wir nehmen den Fall an, daß P_1 und P_2 sich in den getrennten Räumen des Dreiecks II nach Fig. VII befinden.

Die zu P_1 gehörige harmonische Grade c_1 für das Dreieck A B C durchschneidet die endlichen Strecken der Seiten A C und B C und wird daher nach dem Steiner-Schröter'schen Kriterium von den Gegenseiten des Vierecks A B C P_2 in einer elliptischen Involution geschnitten.

Legen wir nun durch c_1 als Verschwindungslinie eine Verschwindungsebene, und projicieren von einem Punkt O derselben das Dreieck A B C auf ein Dreieck A′ B′ C′ in eine der Verschwindungsebene parallele Bildfläche.

In diesem projicierten Dreieck A′ B′ C′ wird Dreieck I A B C auf ein uneigentliches Dreieck A′ B′ C′ projiciert, da die Verschwindungslinie durch die Fläche des Dreiecks A B C hindurchgeht.

Dagegen wird das uneigentliche Dreieck A B. C auf ein eigentliches Dreieck A′ B′ C′ projiciert. In diesem Dreieck A′ B′ C′ wird die unendlich ferne Grade der Ebene des Dreiecks A B. C auf die Fluchtlinie projiciert, welche die endlichen Seitenlängen A′ C′ und B′ C′ des projicierten Dreiecks A′ B′ C′ durchschneidet.

Nun sind die Punkte P_1 und P_2 zunächst so auf den inneren Raum des Dreiecks A′ B′ C′ projiciert daß P_1 Schwerpunkt ist und P_2 auch in den Innenraum des eigentlichen Dreiecks A′ B′ C′ hineinfällt. Beide Punkte sind so gelegen, daß sie durch die Fluchtlinie getrennt sind.

Nun kann man dem Projektionscentrum O in der einmal angenommenen Verschwindungsebene eine derartige Lage geben, daß von ihm aus die involutorisch gepaarten Punkte der Involution, in welcher c_1 von den Gegenseiten des Vierecks A B C P_2 geschnitten wird, unter rechten Winkeln gesehen werden.

Dann wird nach Seite 15 P_2 auf den Höhenschnittpunkt des Dreiecks A′ B′ C′ projiciert, und da die Verschwindungslinie c_1 die harmonischen Gerade des Punktes P_1 ist, so wird gleichzeitig P_1 auf den Schwerpunkt P_1′ des Dreiecks A′ B′ C′ projiciert.

Construiert man nun zu P_2 für Dreieck A B C die harmonische Gerade c_2, so hat diese zu den Staudtschen Dreiecken dieselbe relative Lage wie c_1 und wird von den Gegenseiten des Vierecks A B C P_1 in einer elliptischen Involution geschnitten.

Nun kann man durch c_2 eine Verschwindungsebene legen, und in derselben ein Projektionscentrum O′, wie soeben erörtert, derartig bestimmen, daß in einer dieser Verschwindungsebene parallelen Bildebene Punkt P_1 auf den Höhenschnittpunkt, P_2 auf den Schwerpunkt des abgebildeten Dreiecks A′ B′ C′ projiciert wird.

Abschnitt II.

Die Projektion des Feuerbach'schen Kreises und weitere Beziehungen.

§ 5. Eigenschaften des Feuerbach'schen Kreises.

Mittelst der im vorigen Abschnitt auseinandergesetzten Beziehungen sind wir nun im Stande, die projektivischen Eigenschaften des Feuerbach'schen Kreises zu untersuchen.

Wir gehen aus von den als bekannt vorausgesetzten Sätzen der Euklidischen Geometrie, welche den Feuerbach'schen Kreis betreffen, und verallgemeinern dieselben durch die Centralprojektion.

Fig. VIII. Der Übersicht wegen stellen wir zunächst folgende Beziehungen zusammen; wir benennen den umschriebenen Kreis des Dreiecks A B C mit K_1, seinen Mittelpunkt mit U; den Feuerbach'schen Kreis mit K_2, seinen Mittelpunkt mit F.

Schnittpunkt der Höhen ist P_1.
Schnittpunkt der Mittellinien ist P_2.
Fußpunkte der Höhen sind A_1, B_1, C_1.
Fußpunkte der Mittellinien sind A_2, B_2, C_2.
Durchschnittspunkte der Höhen mit dem Feuerbach'schen Kreise sind $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$.

Diese Punkte halbieren die oberen Höhenabschnitte, und geht K_2 durch die letzten 9 Punkte.

Die Durchschnittspunkte von K_2 mit den Mittellinien sind $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$.

Wir bemerken an dieser Stelle zunächst Folgendes. Der Kreis K_2 ist nicht nur Feuerbachscher Kreis für das Hauptdreieck A B C, sondern auch für die Teildreiecke, welche ihre gemeinsame Spitze im Höhenschnittpunkt P_1 haben, nämlich A B P_1, B C P_1, A C P_1.

Denn für irgend eines derselben z. B. A C P_1 sind A_1, B_1, C_1 die Fußpunkte der Höhen, als deren Schnittpunkt B aufzufassen ist.

$$\text{Da nun } B A_2 = A_2 C,$$
$$B \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1 P_1,$$
$$B C_2 = C_2 A,$$

so sind A_2, $\mathfrak{B}_1$, C_2 die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte; der durch A_1, B_1, C_1, A_2, $\mathfrak{B}_1$, C_2 bestimmte Kegelschnitt ist aber Kreis K_2.

Analog ist es bei den übrigen Teildreiecken.

Der bekannte Satz, daß K_2 die 4 Berührungskreise des Hauptdreiecks A B C tangiert, läßt sich bei seiner allgemeinen Gültigkeit auch auf die 3. 4 Berührungskreise jedes der drei Teildreiecke übertragen, welche nebst den 4 Berührungskreisen des Hauptdreieckes also auch den Feuerbach'schen Kreis tangieren. Demnach ergiebt sich der Satz:

K_2 tangiert die 16 Berührungskreise des Hauptdreiecks und der drei Teildreiecke, welche ihre Spitze im Höhenschnittpunkt haben.

Wir stellen nun folgende bekannten Beziehungen zusammen, deren Beweis (s. Baltzer, Planimetrie § 12) als bekannt vorausgesetzt wird.

I. K_2 geht durch folgende 9 Punkte:

A_1, B_1, C_1 (Fußpunkte der Höhen)

A_2, B_2, C_2 (Fußpunkte der Mittellinien)

$\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2$ (Halbierungspunkte der oberen Höhenabschnitte).

II. Die Punkte P_1, F, P_2, U sind harmonische Punkte und zwar ist

$$\frac{F\,P_2}{F\,P_1} = \frac{U\,P_2}{U\,P_1} = \frac{1}{2}$$

Der Radius von K_2 ist halb so groß wie der Radius von K_1.

III. K_2 tangiert die 16 Berührungskreise des Hauptdreiecks A B C und der Teildreiecke, welche ihre gemeinsame Spitze in P_1 haben.

Bevor wir diese Beziehungen verallgemeinern, führen wir an Fig. VIII. noch einige Betrachtungen, auf welchen im Wesentlichen auch der Beweis der Sätze I—III beruht.

Verbinden wir die Fußpunkte der Mittellinien, so entsteht ein Dreieck $A_2 B_2 C_2$ ähnlich A B C. Innerer Ähnlichkeitspunkt ist P_2, der Schnittpunkt der Mittellinien. Also ist P_2 auch innerer Ähnlichkeitspunkt der den Dreiecken A B C und A_2 B_2 C_2 umschriebenen Kreise K_1 und K_2.

Verbinden wir ferner die Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte, so ist Dreieck $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{C}_1$ ähnlich A B C. Äußerer Ähnlichkeitspunkt ist P_1, der Höhenschnittpunkt. Also ist P_1 auch äußerer Ähnlichkeitspunkt der den Dreiecken A B C und $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{C}_1$ umschriebenen Kreise K_1 und K_2.

Die Seiten der Dreiecke A_2 B_2 C_2 und $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{C}_1$ sind halb so groß wie die Seiten des Dreiecks A B C; da die homologen Seiten alle parallel liegen, so haben die congruenten Dreiecke $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{C}_1$ und A_2 B_2 C_2 in K_2 die in Fig. IXa dargestellte Lage. Die Umfassungsfigur ihrer Eckpunkte bildet ein involutorisches Sechseck mit parallelen und gleichen gegenüberliegenden Seitenpaaren.

Die Verbindungslinien der Fußpunkte der Höhen A_1, B_1, C_1 und der oberen Durchschnittspunkte der Mittellinien $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{C}_2$ ergeben zwei andere sich durchdringende Dreiecke, deren Lage in K_2 in Fig. IXb dargestellt ist.

Es wird sich ergeben, daß die Umfassungsfigur ihrer Eckpunkte ein involutorisches Sechseck bildet, dessen gegenüberliegende Seiten und Diagonalenpaare sich in der Chordalen von K_1 und K_2 schneiden.

Nun fassen wir die Durchschnittspunkte der Höhen- und Mittellinien, P_1 und P_2, welche wir als äußere und innerer Ähnlichkeitspunkte von K_1 und K_2 betrachten, als Collineationscentra beider Kreise auf, Dann sind nach § 2 die zugehörigen Collineationsachsen die unendlich ferne Gerade $g\,\infty$ und die Chordale beider Kreise, welche mit c_1 bezeichnet werden möge.

Nun kann man nach der in § 2 angegebenen Weise K_1 und K_2 auf vierfache Weise auf einander central collinear beziehen. Jedesmal wird dabei das dem Kreise K_1 eingeschriebene Dreieck A B C auf ein anderes dem Kreise K_2 eingeschriebenes Dreieck projiciert werden. Es ist klar, daß alsdann die aufeinander bezogenen

central collinear gelegenen Dreiecke dasselbe Collineationscentrum und dieselbe Collineationsachse haben werden, durch welche gerade im angenommenen Fall K_1 und K_2 auf einander central collinear bezogen sind.

Treffen wir dieselbe Anordnung der 4 Beziehungen von K_1 und K_2, wie auf Seite 10 so ergiebt sich folgende Übersicht ihrer central collinearen Zusammengehörigkeit:

	Collineationsachse.	Collineationscentrum.	Zugeordnete Punkte.	Punkte auf K_1	projiciert auf K_2
1)	g_∞	P_1	homologe Punkte von P_1	A B C	$\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{C}_1$,
2)	g_∞	P_2	homologe Punkte von P_2	A B C	A_2 B_2 C_2,
3)	c_1	P_1	potenzhaltende Punkte von P_1	A B C	A_1 B_1 C_1,
4)	c_1	P_2	potenzhaltende Punkte von P_2	A B C	$\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{C}_2$.

Aus dieser Übersicht erfolgt zunächst das Resultat:

Die 12 Durchschnittspunkte von K_2 mit den Höhen- und Mittellinien lassen sich in 4 Dreiecke gruppieren, deren jedes mit A B C central collinear gelegen ist.

Von diesen 4 Dreiecken lassen sich je 2 — die der beiden ersten und die der beiden letzten Reihen — wieder aufeinander central collinear beziehen.

Für $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{C}_1$ und A_2 B_2 C_2 ist nämlich g_∞ Collineationsachse, wie aus Fig. IXa unmittelbar folgt, da $A_2 B_2 \parallel \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$, $B_2 C_2 \parallel \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2$, $A_2 C_2 \parallel \mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1$ ist. Collineationscentrum ist der Mittelpunkt des Kreises F.

(Fig. VIII). Aber auch A_1 B_1 C_1 und $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{C}_2$ sind in untereinander central collinear gelegen. Denn beide haben mit dem Dreieck A B C dieselbe Collineationsachse c_1, die Chordale der Kreise K_1 und K_2, gemeinschaftlich. Demnach müssen sich je drei homologe Seiten A B, A_1 B_1, $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_2$ in einem Punkte der Linie c_2 schneiden, welche also auch Collineationsachse der Dreiecke A_1 B_1 C_1, $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{C}_2$ ist. Also besitzen sie auch ein Collineationscentrum V (Fig. IXb) welches sich durch Verbindung ihrer homologen Eckpunkte ergiebt. Da letztere in einem Kreise K_2 liegen, so ist die Umfassungsfigur derselben ein involutorisches Sechseck und hiermit die Ende der Seite 23 aufgestellte Behauptung bewiesen.

Demnach können wir die 12 Durchschnittspunkte von K_2 mit den Höhen- und Mittellinien in zwei Gruppen zu je 6 Punkten einteilen.

Diese beiden Gruppen bilden zwei involutorische Sechsecke.

Die Schnittlinien der gegenüberliegenden Seiten und Diagonalenpaare sind die beiden Collineationsachsen g_∞ und c_1 der Kreise K_1 und K_2.

Es möge noch darauf hingewiesen werden, daß die Verbindungslinie P_1 P_2 nach II. § 5 auch Centrale der Kreise K_1 und K_2 ist, also senkrecht auf der Chordalen derselben c_1 steht. Diese Linie ist für das Dreieck A B C die Eulersche Gerade. (Baltzer, Elemente der Mathematik Zweiter Band § 12. 8.)

§ 6. Die Projektion des Feuerbach'schen Kreises.

Wir nehmen nun ein Dreieck A B C (Fig. X. Taf. II) an, und machen für vorliegende Untersuchung die Voraussetzung, die Schnittpunkte P_1 und P_2 zweier Transversalensysteme befänden sich innerhalb des Dreiecks A B C (oder allgemeiner: innerhalb eines der Staudt'schen Dreiecke.)

Wir bezeichnen die Fußpunkte der durch A und P_1 resp. P_2 gelegten Transversalen mit A_1 resp. A_2; analog die übrigen Punkte, so daß die Bezeichnung von Fig. VIII. erhalten bleibt, nur daß A A_1 keine Höhe, A A_2 keine Mittellinie ist.

Alsdann entstehen 2 Fußpunkten-Dreiecke A_1 B_1 C_1 und A_2 B_2 C_2, welche beide zu A B C central collinear gelegen si[illegible]

Collineationscentrum von A B C und A_1 B_1 C_1 ist P_1; Collineationsachse Linie c_1.

Die Schnittpunkte der Seiten B C, A C, A B mit c_1 sind A_1, B_1, Γ_1 und sind nach § 4 Aufgabe II

$$\mathit{A}_1,\ B,\ A_1,\ C;$$
$$B_1,\ A,\ B_1,\ C;$$
$$\Gamma_1,\ A,\ C_1,\ B$$

harmonische Punkte.

Ebenso ist für die Dreiecke A B C, A_2 B_2 C_2 Collineationscentrum P_2, Collineationsachse Linie c_2.

Die Schnittpunkte der Seiten B C, A C, A B mit c_2 sind A_2 B_2, Γ_2, und sind ebenfalls nach § 4

$$\mathit{A}_2,\ C,\ A_2,\ B$$
$$B_2,\ A,\ B_2,\ C$$
$$\Gamma_2,\ A,\ C_2,\ B$$ harmonische Punkte.

Wir bezeichnen ferner die Schnittpunkte von c_1 mit den sich in P_2 schneidenden Transversalen

$$A\ A_2,\ \ B\ B_2,\ \ C\ C_2$$
mit $(A)_1$, $(B)_1$, $(C)_1$.

Ebenso bezeichnen wir die Schnittpunkte von c_2 mit den sich in P_1 schneidenden Transversalen

$$A\ A_1,\ \ B\ B_1,\ \ C\ C_1$$ mit
$$(A)_2,\ \ (B)_2,\ \ (C)_2.$$

Alsdann sind die Punkte

$$\mathit{A}_1\ (A)_1,\ \ B_1\ (B)_1,\ \ \Gamma_1\ (C)_1$$

involutorisch gepaart als Durchschnittspunkte der Linie c_1 mit den Seitenpaaren des durch die Punkte A B C P_2 bestimmten vollständigen Vierecks.

Analog sind A_2 $(A)_2$, B_2 $(B)_2$, Γ_2 $(C)_2$ involutorisch gepaart als Durchschnittspunkte der Linie c_2 mit den Seitenpaaren des durch die Punkte A B C P_1 bestimmten vollständigen Vierecks.

Der Schnittpunkt der beiden Linien c_1, c_2, welche beide Träger einer elliptischen Involution sind, werde mit S bezeichnet.

Nun kann man c_1 als Verschwindungslinie annehmen, und in einer durch dieselbe gelegten Verschwindungsebene, ein Projektionscentrum O′ nach § 4 derartig bestimmen, daß auf eine der Verschwindungsebene parallele Bildfläche A B C so auf A′ B′ C′ projiciert wird, daß P_1 als Schnittpunkt der Mittellinien, P_2 als Schnittpunkt der Höhen in A′ B′ C′ auf P'_1 und P_2' projiciert werden.

Nun kann man aber auch c_2 als Verschwindungslinie annehmen und in einer durch dieselbe gelegten Verschwindungsebene ein Projektionscentrum O″ nach § 4 derartig bestimmen, daß auf eine der Verschwindungsebene c_2 parallele Bildebene A B C so auch A″ B″ C″ projiciert wird, daß P_2 als Schnittpunkt der Mittellinien, P_1 als Schnittpunkt der Höhen im Dreieck A″ B″ C″ auf P_2'' und P_1'' projiciert werden.

Das Dreieck A B C kann demnach, wenn man O′ und O″ als leuchtende Punkte annimmt, als Schatten zweier verschiedener Dreiecke A′ B′ C′ und A″ B″ C″ betrachtet werden. Im ersten ist P'_1 Schnittpunkt der Mittellinien, P'_2 Schnittpunkt der Höhen; in letzterem A″ B″ C″ ist umgekehrt P''_1 Schnittpunkt der Höhen, P''_2 Schnittpunkt der Mittellinien.

Wir haben also auf c_1 die Involution A_1 $(A)_1$, B_1 $(B)_1$, Γ_1 $(C)_1$, entstanden durch das vollständige Viereck A B C P_2; und zwar kommen A_1, $(A)_1$ von B C, P_2 A her 2c.

Eine analoge Involution von Viereck A B C P_1 herrührend ist auf c_2, nämlich

$$\mathit{A}_2\ (A)_2,\ B_2\ (B)_2,\ \Gamma_2\ (C)_2.$$

Jetzt werde die Figur so projiciert, daß P'_1 Schwerpunkt und P'_2 Höhenschnittpunkt von A′ B′ C′ wird

Dann ist c_1 in die unendlich ferne Gerade c'_1 projiciert, dagegen c_2 in die Chordale c'_2 des um das Dreieck $A' B' C'$ umschriebenen Kreises K'_1 und seines Feuerbachschen Kreises K'_2.

Beide Involutionen auf c_1 und c_2 gehen in die Involutionen der conjugierten Punkte über, welche, beiden Kreisen gemeinschaftlich sind.

Demnach geht, wenn wir zurück projicieren, der Feuerbach'sche Kreis K'_2 über in einen Kegelschnitt, welcher durch A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 geht. Der umschriebene Kreis K'_1 geht in einen Kegelschnitt K_1 über, welcher durch die Punkte A, B, C geht; beide Kegelschnitte K_1 und K_2 haben die auf c_1 und c_2 befindlichen Involutionen zu Involutionen conjugierter Punkte.

Wird nun zweitens die Originalfigur so projiciert, daß P''_1 Höhenschnittpunkt, P''_2 Schwerpunkt von $A'' B'' C''$ wird, so construieren wir nun auch für dieses Dreieck, für welches c_2 auf die unendlich ferne Gerade c'_2 fällt, den umschriebenen Kreis K''_1 und den Feuerbachschen Kreis K''_2.

Projicieren wir nun die Kreise K''_1 und K''_2 zurück und bezeichnen ihre Projektionen in der Ebene des Dreiecks A B C zunächst mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$.

Es ist sofort ersichtlich, daß K_2 und $\mathfrak{K}_2$ identisch sind; denn beide haben die 6 Punkte A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 gemeinsam, was schon mehr als genügend ist; und außerdem noch die beiden Involutionen auf c_1 und c_2.

Eine gegebene Involution aber zur Involution conjugierter Punkte zu besitzen, ist für einen Kegelschnitt äquivalent mit 2 Bedingungen: nämlich durch die beiden Doppelpunkte der Involution zu gehen.

Also sind auch die dem Dreieck A B C umschriebenen Kegelschnitte K_1 und $\mathfrak{K}_1$ identisch; denn sie haben A, B, C und diese 4 (imaginären) Doppelpunkte der auf c_1 und c_2 befindlichen Involutionen gemeinsam.

Wir haben demnach durch beide Projektionen dieselben 2 Kegelschnitte K_1, K_2 erhalten, für welche c_1 und c_2 ideelle gemeinsame Sekanten sind. Die imaginären gemeinsamen Punkte sind die Doppelpunkte der elliptischen Involutionen auf c_1 und c_2, von denen wir je drei Paare, die oben genannten, besitzen.

Nun nehmen wir die zu Anfang dieses Abschnittes erwähnten bekannten Beziehungen, welche der Feuerbach'sche Kreis bietet, der Reihe nach vor, und projicieren abwechselnd von O' und O'' aus, um nach den bekannten Sätzen der Perspektive die Beziehungen der Curven K_1 und K_2 im Dreieck A B C und seinen Transversalen-Systemen zu ermitteln.

Vorher bringen wir die unter I, II, III und den folgenden Teilen erwähten Beziehungen von § 5 indem wir sie auf K'_2 und K_2'' anwenden, auf eine derartige Form, daß der Wortlaut der Darstellung unverändert bleibt, wenn wir statt des Dreiecks A' B' C' resp. A'' B'' C'' und ihrer Bestandtheile die ihnen entsprechenden Projektionen (Schatten) A B C 2c. einsetzen.

Zunächst bemerken wir, daß wir die unendlich ferne Gerade in der Bildebene des Dreiecks A' B' C' mit g'_∞ bezeichnen. Ihre Projektion ist die Verschwindungslinie c_1.

Die unendlich ferne Gerade in der Bildebene des Dreiecks A'' B'' C'' ist g''_∞. Ihre Projektion ist die Verschwindungslinie c_2.

Ferner sind für K'_1 und K'_2 die beiden Collineationsachsen 1) Linie g'_∞; 2) die Chordale von K'_1 und K'_2.

Diese werden projiciert auf c_1 und die andere Collineations Achse c_2 der Curven K_1 und K_2.

Ebenso sind für K''_1 und K''_2 die beiden Collineationsachsen 1) Linie g''_∞ 2) die Chordale der Kreise K_1'' und K_2''.

Erstere wird projiciert auf die als Verschwindungslinie angenommene Linie c_2, letztere auf die andere Collineationsachse, welche c_1 ist.

Die Linie c_1 und c_2 sind also auf doppelte Weise als Projektionen aufzufassen.

I. 1) Linie c_1 ist Projektion von g'_∞; Projektionsmittelpunkt ist O'.

2) Linie c_1 ist Projektion der Chordale von K_1'' und K_2''; Projektionsmittelpunkt ist O.''

II. 1) Linie c_2 ist Projektion von g''_∞; Projektionscentrum ist O''.

2) Linie c_2 ist Projektion der Chordale der Kreise K_1' und K_2'; Projektionscentrum ist O'.

Modificieren wir jetzt Beziehung I. (Seite 23).

K'_2 geht durch folgende 9 Punkte

1) A_2' B'_2 C'_2 (Fußpunkte der Höhen),

2) A_1' B_1' C_1' (Fußpunkte der Mittellinien),

3) $\mathfrak{A}_2'$ $\mathfrak{B}_2'$ $\mathfrak{C}_2'$ (Halbierungspunkte der oberen Höhenabschnitte)

Da $A'\ \mathfrak{A}'_2 = \mathfrak{A}_2'\ P_2'$ so ist $\mathfrak{A}_2'$ von A_1 und P_2' durch den unendlich fernen Punkt der Geraden $A'\ P_2'$ harmonisch getrennt. Dem unendlich fernen Punkt der Linie $A'\ P_2'$ fassen wir auf als Durchschnittspunkt der Linie g'_∞ mit der Transversale $A'\ P'_2$ oder $A'\ A'_2$. Ebenso verfahren wir bei den übrigen Halbierungspunkten $\mathfrak{B}_2'$ und $\mathfrak{C}_2'$ und erhalten folgende modificierte Beziehung I in Betreff des Feuerbach'schen Kreises K'_2:

K_2' geht durch folgende 9 Punkte:

1) A'_2, B_2' C_2' ⎫
2) A_1', B_1', C_1' ⎭ Fußpunkte der sich in P_1' und P_2' schneidenden Transversalen.

3) $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{C}_2'$.

Letztere Punkte sind harmonisch getrennt von P_2' durch die Ecken A' B' C' von den Durchschnittspunkten der Transversalen (auf denen sie sich befinden) mit g'_∞.

Projicieren wir von O' aus, so gehen für die Projektion K_2 diese eben modificierten Beziehungen in folgende über:

K_2 geht durch folgende 9 Punkte:

1) A_2, B_2, C_2, ⎫
2) A_1, B_1, C_1, ⎭ Fußpunkte der sich in P_1 und P_2 schneidenden Transversalen.

3) $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$.

Letztere Punkte sind harmonisch getrennt von P_2 durch die Ecken A, B, C von den Durchschnittspunkten der Transversalen (auf denen sie liegen) mit c_1.

Nun projicieren wir von O'' aus das Dreieck A'' B'' C''. Dann erhalten wir auf dieselbe Weise, daß zunächst K_2 durch die 6 Fußpunkte der Transversalen geht, aber da in Dreieck A'' B'' C'' Punkt P_1'' Höhenschnittpunkt ist, sind die drei letzten Punkte, durch welche K_1 geht:

3) $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$.

Letztere Punkte sind harmonisch getrennt von P_1 durch die Ecken A B C von den Durchschnittspunkten der Transversalen (auf denen sie liegen) mit c_2.

Demnach sind von K_2 nicht nur 9, sondern 12 Punkte bekannt, von denen 6 die Fußpunkte der Transversalen sind, und die übrigen 6 leicht geometrisch zu construierenden Punkte die zweiten Durchschnittspunkte der Transversalen mit K_2 sind.

Modificieren wir nun Beziehung II. Der für uns verwendbare Teil lautet in Bezug auf Dreieck A' B' C':

Die Punkte P_1', F', P_2', U' sind 4 harmonische Punkte.

P_1' und P_2' sind die beiden Collineationscentra von K_1' und K_2'; F', Mittelpunkt von K_2', ist der Pol von g'_∞ in Bezug auf K_2'; U', Mittelpunkt von K_1', ist der Pol von g'_∞ in Bezug auf K'_1.

Demnach lautet die modificierte Beziehung II für A' B' C':

Die Pole von g'_∞ in Bezug auf K_1' und K_2' sind harmonisch von einander getrennt durch die Collineationscentra P_1' und P_2' der Kreise K_1' und K_2'.

Projicieren wir A' B' C' von O' aus, so gehen diese Beziehungen über in folgenden Wortlaut:

Die Pole von c_1 in Bezug auf K_1 und K_2 sind harmonisch von einander getrennt durch die Collineationscentra P_1 und P_2 der Kegelschnitte K_1 und K_2.

Ebenso erhalten wir, wenn wir die modificierte Beziehung II auf A'' B'' C'' anwenden, dann von O'' aus projicieren, folgende Beziehung:

Die Pole von c_2 in Bezug auf K_1 und K_2 sind harmonisch von einander getrennt durch die Collineationscentra P_1 und P_2 der Kegelschnitte K_1 und K_2.

Diese beiden aus Beziehung II abgeleiteten Sätze bilden zusammen den in § 2 schon abgeleiteten Satz, aus dem sich ergiebt, daß die Verbindungslinie der Collineationscentra P_1 und P_2 eine gemeinschaftliche Polare des Schnittpunktes S von c_1 und c_2 für K_1 und K_2 ist.

Wenden wir uns nun zur 3ten Beziehung III, welche auf A' B' C' angewendet lautet:

K_2' tangiert die 16 Berührungskreise des Hauptdreiecks A' B' C' und der 3 Teildreiecke, welche ihre gemeinsame Spitze in P_2', dem Höhenschnittpunkt von A' B' C', haben.

Wir haben hier die Kreise zunächst als Kegelschnitte zu definieren, welche in g'_∞ eine gemeinschaftliche ideale Sehne besitzen, und auf dieser ein „Cirkularsystem" inducieren, welches für jeden Kreis dasselbe ist.

Dieses Circularsystem auf g'_∞ wird aber auf g'_∞ auch durch die Seiten des Vierecks, welches durch die Punkte A' B' C' P_2' bestimmt ist, angegeben.

Demnach ist ein Kreis in der Ebene des Dreiecks A' B' C' ein Kegelschnitt, welcher auf g'_∞ ein Punktsystem induciert, identisch mit demjenigen, welches durch die Schnittpunkte von g'_∞ mit den Seiten des durch die Punkte A' B' C' P_2' bestimmten Vierecks angegeben wird.

Nun lautet die in Bezug auf Dreieck A' B' C' transformierte Beziehung III:

K_2' tangiert die 16 Kegelschnitte, welche die Seiten des Hauptdreiecks A' B' C' und der Teildreiecke, welche ihre gemeinsame Spitze in P_2' haben, berühren und auf der Linie g'_∞ als ihrer gemeinsamen idealen Sehne ein Punktsystem inducieren, identisch mit demjenigen, in welchem g'_∞ von den Seiten des durch die Punkte A' B' C' P_2' bestimmten Vierecks geschnitten wird.

Linie g'_∞ mit dem erwähnten Punktsystem ist außerdem ideale gemeinsame Sehne der Kegelschnitte K_1' und K_2'.

Um Wiederholungen zu vermeiden, denken wir uns Beziehung III auch für A'' B'' C'' modificiert, und schreiben die sich ergebenden Folgerungen untereinander, so daß die oberen und unteren Buchstaben zusammengehören:

Projiciert man Dreieck $\genfrac{}{}{0pt}{}{A'\,B'\,C'}{A''\,B''\,C''}$ von $\genfrac{}{}{0pt}{}{O'}{O''}$, so geht die für diese Dreiecke modificierte Beziehung III. über in:

K_2 tangiert die $2 . 16 = 32$ Kegelschnitte, welche die Seiten des Hauptdreiecks $\genfrac{}{}{0pt}{}{A'\,B'\,C'}{A''\,B''\,C''}$ und der Teildreiecke, welche ihre gemeinsame Spitze in $\genfrac{}{}{0pt}{}{P_2}{P_1}$ haben berühren, und auf der Linie $\genfrac{}{}{0pt}{}{c_1}{c_2}$ als ihrer gemeinsamen idealen Sehne ein Punktsystem inducieren, identisch mit demjenigen, in welchem $\genfrac{}{}{0pt}{}{c_1}{c_2}$ von den Seiten des durch die Punkte $\genfrac{}{}{0pt}{}{A\,B\,C\,P_2}{A\,B\,C\,P_1}$ bestimmten Vierecks geschnitten wird.

Die Linien $\frac{c_1}{c_2}$ (mit den erwähnten Punktsystemen) sind außerdem die beiden idealen gemeinsamen Sehnen der Kegelschnitte K_1 und K_2, da diese die Projektionen der Kreise K_1', K_2', und gleichzeitig die Projektionen der Kreise K_1'' und K_2'' sind.

Es hat sich also folgendes Resultat ergeben:

K_2 tangiert 32 Kegelschnitte. Diese zerfallen in zwei Gruppen zu 16 Kegelschnitten.

Die eine Gruppe ist schon dadurch bestimmt, daß ihre Kegelschnitte die 3 Seiten des Hauptdreiecks oder die 3 Seiten je eines der um P_2 als gemeinsamer Spitze gelagerten Teildreiecke berühren. Sie inducieren auf c_1 die Involution, zu welcher die Punktenpaare A_1 $(A)_1$, B_1 $(B)_1$, Γ_1 $(C)_1$ gehören. Diese involutorisch gepaarten Punkte sind die Schnittpunkte der Linie c_1 mit den Seiten des durch die Punkte A B C P_2 bestimmten vollständigen Vierecks.

Die andere Gruppe der 16 von K_2 tangierten Kegelschnitte ist schon dadurch bestimmt, daß ihre Kegelschnitte die 3 Seiten des Hauptdreiecks oder die 3 Seiten je eines der um P_1 als gemeinsame Spitze gelagerten Teildreiecke berühren.

Sie inducieren auf c_2, ihrer gemeinsamen idealen Sehne, die Involution, zu welcher die Punkte A_2 $(A)_2$, B_2 $(B)_2$, Γ_2 $(C)_2$ gehören. Diese involutorisch gepaarten Punkte sind die Schnittpunkte der Linie c_2 mit den Seiten des durch die Punkte A B C P_1 bestimmten vollständigen Vierecks.

Da ferner die beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 auf c_1 und c_2 als auf ihren Collineationsachsen dieselben Involutionen inducieren, wie je eine Gruppe von 16 Kegelschnitten auf einer derselben, so sind K_1 und K_2 aufzufassen als 2 Individuen eines Kegelschnittbüschels mit 4 imaginären Mittelpunkten, welches durch c_1, c_2 und die auf beiden Linien befindlichen involutorischen Reihen ihrer conjugierten Punkte

$$A_1\ (A)_1,\ B_1\ (B)_1\ \ldots.$$
$$\text{und } A_2\ (A)_2,\ B_2\ (B)_2\ \ldots.$$

gegeben ist.

Von diesen beiden Individuen der Büschelcurven sind uns drei Punkte von K_1, die Eckpunkte des Dreiecks bekannt; von K_2 können wir 12 bestimmbare Punkte angeben.

Untersuchen wir nun die beiden auftretenden involutorischen Sechsecke.

Betrachten wir für diesen Fall zunächst Dreieck A″ B″ C″, weil in demselben die Bezeichnung der beiden involutorischen Sechsecke in Bezug auf Lage, Buchstaben und Index mit den in den Fig. VIII und Fig. IXa gezeichneten übereinstimmt.

Betrachten wir das erste involutorische Sechseck $\mathfrak{A}_1''$ B_2'' $\mathfrak{C}_1''$ A_2'' $\mathfrak{B}_1''$ C_2'', so sind seine gegenüberliegende Seitenpaare parallel und zwar den Höhen des Dreiecks A″ B″ C″ ꝛc.; denn die Diagonalen erster Ordnung wie $\mathfrak{A}_1''$ $\mathfrak{B}_1''$ sind parallel den Seiten A″ B″ ꝛc; auf letzteren stehen die betreffenden Seitenpaare des involutorischen Sechsecks aber senkrecht. Denn $\mathfrak{A}_1$ B_2 A_2 $\mathfrak{B}_1$ Fig. IXa ist ein Rechteck.

Modificieren wir diese Bemerkung zum Zweck der Projektion aus O″, so lautet dieselbe:

1) Die Seitenpaare B''_2 $\mathfrak{A}_1''$ und A''_2 $\mathfrak{B}_1''$ und die Transversale C″ C_1'' schneiden sich in einem Punkte auf g''_∞.

2) Die Diagonalenpaare B''_2 A_2'', $\mathfrak{A}_1''$ $\mathfrak{B}_1''$ und die Seite A'' B'' schneiden sich in einem Punkte auf g''_∞.

Projicieren wir von O'', so ergiebt sich:

1) Die Seitenpaare B_2 $\mathfrak{A}_1$ und A_2 $\mathfrak{B}_1$ und die Transversale C C_1 schneiden sich in einem Punkte auf c_2.

Dieser Punkt ist aber $(C)_2$, Schnittpunkt der Transversale C C_1 und der Linie c_2.

2) Die Diagonalenpaare B_2 A_2, $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ und die Seite A B schneiden sich in einem Punkte auf c_2.

Dieser Punkt ist aber Γ_2, Schnittpunkt der Seite A B mit Linie c_2.

Hieraus folgt:

Auf Linie c_2 sind die involutorisch gepaarten Punkte $\mathcal{A}_2$ $(A)_2$ &c. zugleich Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten und Diagonalenpaare des involutorischen Sechsecks $\mathfrak{A}_1$ B_2 $\mathfrak{C}_1$ A_2 $\mathfrak{B}_1$ C_2.

Analog folgt durch Projektion von O':

Auf Linie c_1 sind die involutorisch gepaarten Punkte $\mathcal{A}_1$ $(A)_1$ &c. zugleich Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten und Diagonalenpaare des involutorischen Sechsecks $\mathfrak{A}_2$ B_1 $\mathfrak{C}_2$ A_1 $\mathfrak{B}_2$ C_1.

Die Verbindungslinie der gegenüberliegenden Ecken der involutorischen Sechsecke schneiden sich in den 2 Polen von c_1 und c_2 in Bezug auf K_2; dieselben sind harmonisch getrennt von P_1 und P_2. (Seite 14.)

Desgleichen sind von P_1 und P_2 harmonisch getrennt die Pole sowohl von c_1 als von c_2 in Bezug auf K_1.

Denn letztere Punkte sind leicht zu construieren als Bilder der Mittelpunkte von den Kreisen K'_1 und K''_1, welche den Dreiecken A' B' C' und A'' B'' C'' umschrieben sind. Diese Mittelpunkte der erwähnten Kreise sind aber als die Polaren der unendlich fernen Graden der Ebenen der Dreiecke A' B' C' u. A'' B'' C'' aufzufassen, deren Projektionen die Linien c_1 und c_2 sind.

Die Linie, welche der Träger beider harmonischer Gebilde ist, ist, wie § 2 nachgewiesen, die Polare des Punktes S, des Schnittpunktes der Linien c_1 und c_2, für die Curven K_1 und K_2.

Wir machen am Schluß dieses Teils noch folgende Bemerkung:

Es hat sich herausgestellt, daß der Kegelschnitt K_2 durch 12 Punkte bestimmt ist, während man zur Bestimmung des Feuerbach'schen Kreises in der Regel nur 9 Punkte angiebt, die Durchschnittspunkte desselben mit den Mittellinien aber nicht.

Dieselben sind aber ebenfalls nach diesem § 6 zu bestimmen.

Um z. B. $\mathfrak{B}_2$ Fig. VIII zu ermitteln, verlängere man Transversale B B_2 bis zum Schnittpunkt $(B)_1$ mit Linie c_1; alsdann ist $\mathfrak{B}_2$ harmonisch von $(B)_1$ durch B und B_2 getrennt; also leicht zu construieren.

Ebenso die anderen Punkte $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{C}_2$. So kann man auch vom Feuerbach'schen Kreise 12 Punkte vorher geometrisch bestimmen.

§ 7. Ueber das zu einem Feuerbach'schen Kreise gehörige Kreisquadrupel.

Der Radius des Feuerbach'schen Kreises ist halb so groß als der Radius des dem Dreieck umschriebenen Kreises. Nehmen wir zunächst das gegebene Dreieck als spitzwinklig an, so ist wie bewiesen, der Feuerbach'sche Kreis des spitzwinkligen Dreiecks zugleich Feuerbach'scher Kreis für die drei Teildreiecke desselben, welche ihre Spitze im Höhenschnittpunkt haben. (Seite 22).

Also sind die drei Kreise, welche jenen Teildreiecken umschrieben sind, und der dem ursprünglich angenommenen spitzwinkligen Dreieck umschriebene Kreis unter einander congruent, da ihre Radien doppelt so groß wie der des Feuerbach'schen Kreises ist, welcher zu diesen 4 Dreiecken gehört.

Wir nehmen nun in Fig. XI Taf. I A B C als ursprüngliches Dreieck an und bezeichnen den Höhenschnittpunkt mit P. Dann construieren wir die dem Dreieck A B C und den Teildreiecken um P umschriebenen Kreise. Dieselben bezeichnen wir mit K_1, K_2, K_3, K_4. Jeder dieser 4 congruenten Kreise geht also durch drei von den 4 Punkten A_1, B_1, C_1, P. Letztere haben eine derartige Lage, daß jeder von ihnen der Höhenschnittpunkt des von den drei anderen Punkten gebildeten Dreiecks ist.

Wir bezeichnen die Gesamtheit dieser 4 congruenten Kreise mit dem Namen „Quadrupel".

Umgekehrt läßt sich leicht beweisen:

Sind die 4 Kreise, welche den 4 Dreiecken, gebildet aus je 3 der 4 Punkte A B C P umschrieben sind, congruent, so ist jeder der 4 Punkte Höhenschnittpunkt des von den drei anderen gebildeten Dreiecks.

Der Beweis läßt sich an Fig XI auf folgende Weise führen.

Wir setzen voraus, daß die Kreise K_1, K_2, K_3, K_4 congruent sind, bezeichnen ihre Mittelpunkte mit M_1 bis M_4 und weisen zunächst nach, daß je eine Centrale wie $M_2 M_4$ parallel einer Seite A B des Dreiecks A B C ist.

Wir bezeichnen die Durchschnittspunkte der Linien $M_2 M_3$ und P B mit R, so ist R der Mittelpunkt von P B, und da K_2 und K_3 congruent sind, auch Mittelpunkt der Centrale $M_2 M_3$

Ebenso ist, wenn wir den Durchschnittspunkt der Linien $M_3 M_4$ und A P mit S bezeichnen, Punkt S Mittelpunkt der Linien $M_3 M_4$ und A P.

Verbinden wir nun S mit R so ist Dreieck M_3 S R ähnlich $M_2 M_3 M_4$; also S R $\parallel$ $M_2 M_4$.

Ferner ist auch Dreieck P S R ähnlich P A B; also S R $\parallel$ A B

Folglich A B $\parallel$ $M_4 M_2$,
ebenso A C $\parallel$ $M_2 M_3$,
und B C $\parallel$ $M_3 M_4$.

Nun steht aber C P als gemeinschaftliche Sehne von K_2 und K_4 senkrecht zur Centrale $M_2 M_4$; also auch senkrecht auf der $M_2 M_4$ parallelen Linie A B.

Wir erhalten also

C P senkrecht zu A B,
analog B P senkrecht zu A C,
A P senkrecht zu B C.

Also ist P Höhenschnittpunkt des Dreiecks A B C.

Es ist aber auch Dreieck A B C congruent $M_2 M_3 M_4$.

Denn da

$$S R \parallel M_4 M_2, \text{ ist } S R = \frac{M_4 M_2}{2};$$

$$\text{und da } S R \parallel A B, \text{ ist } S R = \frac{A B.}{2}$$

Also $M_4 M_2 = A B$; ebenso
$M_4 M_3 = B C$
$M_2 M_3 = A C$.

Da nun M_4 M_2 gleich und parallel A B, so ist auch

M_4 A gleich und parallel M_2 B
ebenso M_4 C „ „ „ M_3 B
und C M_2 „ „ „ M_3 A.

Die Umfassungsfigur A M_4 C M_2 B M_3 ist ein involutorisches Sechseck mit gleichen Seiten und gegenüberliegenden parallelen Seitenpaaren.

Denn M_2 C = M_2 B als Radien des Kreises K_2; B M_2 = B M_3, weil B auf der Mittelsenkrechten der Linie M_2 M_3 liegt.

Also sind zunächst alle Seiten gleich und je zwei gegenüberliegende Seiten wie M_4 A, M_2 B parallel.

Ferner liegen je zwei homologe Seiten der congruenten Dreiecke A B C und M_2 M_3 M_4 wie A B und M_4 M_2 parallel, also schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte M_2 A, M_4 B, M_3 C in einem Punkte. Letztere Linien sind aber im Sechseck A M_4 C M_2 B M_3 Diagonalen zweiter Ordnung, also ist dasselbe ein involutorisches Sechseck, dessen Seiten alle gleich, und dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Es ergiebt sich ferner noch folgendes Resultat:

Der Mittelpunkt M_1 des dem Dreieck A B C umschriebenen Kreises ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks M_2 M_3 M_4.

Denn die Linie M_1 M_2 steht als Centrale der Kreise K_1 K_2 senkrecht auf der diesen Kreisen gemeinsamen Sehne B C. Da aber B C || M_3 M_4 so steht auch

M_2 M_1 senkrecht zu M_3 M_4 und ebenso
M_4 M_1 senkrecht zu M_2 M_3,
M_3 M_1 senkrecht zu M_2 M_4.

Ebenso ist P, der Höhenschnittpunkt des Dreiecks A B C, zugleich Mittelpunkt des dem Dreieck M_2 M_3 M_4 umschriebenen Kreises.

Es ist nämlich

$$P\,M_3 = P\,M_4 = P\,M_2$$

aus folgender Betrachtung.

Irgend eine dieser Seiten ist gleich der Seite des involutorischen Sechsecks

A M_4 C M_2 B M_3

dessen Seiten, wie bewiesen, gleich sind. Denn da z. B. A P und M_3 M_4 sich gegenseitig halbieren und auf einander senkrecht stehen, ist das Viereck A M_4 P M_3 ein Rhombus, also

P M_3 = P M_4. Ebenso folgt

P M_3 = P M_2 aus Betrachtung des Rhombus M_2 P M_3 B.

Betrachten wir nun das in Fig. XI dargestellte Kreisquadrupel.

Die den stumpfwinkligen Teildreiecken umschriebenen 3 Kreise K_2 K_3 K_4 haben zu je zweien ein Doppelsegment über ihrer gemeinschaftlichen Sehne gemeinsam, deren drei vorhanden sind. Wir bezeichnen die Gesamtheit dieser drei Doppelsegmente mit dem Namen „Dreipaß“, einem der gotischen Ornamentik entlehnten Worte.

Wir nennen A, B, C die Außenpunkte, P den Innenpunkt, A P, B P, C P, die Achsen des Dreipasses A B C.

Um einen Dreipaß A B C zu bilden sind also drei congruente Kreise K_2 K_3 K_4 erforderlich, welche sich zu je zweien in den 4 Punkten A, B, C, P schneiden.

Wenn diese Lage stattfindet, so ist der vierte durch die Punkte A B C gehende Kreis K_1 congruent den drei anderen.

Denn wie auf Seite 31 wird zunächst bewiesen, daß die Achsen C P, A P, B P des Dreipasses A B C die Höhen des Dreiecks A B C sind. Dann sind K_2, K_3, K_4 die den 3 Teildreiecken um den Höhenschnittpunkt umschriebenen Kreise.

Diese drei Teildreiecke haben aber mit dem Dreieck A B C denselben Feuerbach'schen Kreis gemeinsam; also sind die ihnen umschriebenen 4 Kreise congruent. Folglich ist der durch die drei Außenpunkte A, B, C des Dreipasses A B C gehende Kreis K_1 congruent den drei Kreisen K_2, K_3, K_4.

Indem wir nun an einen vorhandenen Dreipaß andere anschließen, ergeben sich interessante Gruppierungen von Punkten.

Nimmt man z. B. in Fig. XII K_1 als Anfangskreis, schließt an diesen die congruenten Kreise K_2, K_3 derartig an, daß sich K_2 und K_3 in einem Punkte D auf K_1 schneiden, so bildet sich zunächst Dreipaß A B C mit dem Innenpunkte D.

Nun können wir einen congruenten Kreis K_4 durch C hindurchlegen, welcher K_3 in F, und K_1 in E schneidet. Dann bildet sich ein zweiter Dreipaß D F E mit dem Innenpunkte C.

Es ist also D Innenpunkt des ersten und Außenpunkt des zweiten Dreipasses; umgekehrt ist C Innenpunkt des zweiten und Außenpunkt des ersten Dreipasses; jeder Innenpunkt ist ferner Höhenschnittpunkt des von den drei Außenpunkten gebildeten Dreiecks.

Nun kann man einen 5ten congruenten Kreis K_5 in derselben Weise an K_4 und K_1 durch Punkt E hindurchlegen, und durch den entstehenden Durchschnittspunkt mit K_1 wieder einen neuen congruenten Kreis 2c. Man kann es nun so einrichten, daß die Sehnen, welche K_1 mit den anschließenden Kreisen gemeinschaftlich hat, ein dem Kreise K_1 eingeschriebenes Polygon bilden.

Dann kann man jeden der einschließenden Kreise wieder als Anfangskreis ansehen, und so die ganze unendliche Ebene mit einem System von Dreipassen ausfüllen, wo je ein Innen- oder Außenpunkt eines Dreipasses der Höhenschnittpunkt des betreffenden Dreiecks, gebildet aus anderen Punkten des Dreipasses ist.

In äußerst übersichtlicher Weise gestaltet sich diese Gruppierung, wenn wir, wie eben beschrieben, an jeden Kreis 6 Außenkreise legen, so daß jedem Kreise ein Sechseck eingeschrieben ist, dessen Sehnen je zwei congruenten Kreisen gemeinschaftlich sind.

Bei dieser in Fig. XIII gezeichneten Constellation der Punkte wird die ganze unendliche Ebene von Sechsecken ausgefüllt, deren Eckpunkte in congruenten Kreisen liegen.

Nun gehört jeder Punkt M drei Sechsecken an, und ist M als Innenpunkt eines Dreipasses anzusehen dessen Achsen die von dem Punkte M ausgehenden drei Seiten der drei verschiedenen Sechsecke sind.

Also läßt sich K zunächst auffassen als Schnittpunkt der drei congruenten Kreise, welche um die drei Sechsecke gelegt sind, deren gemeinschaftlicher Punkt M ist.

Wir haben bis jetzt nur mit den drei Kreisen eines Quadrupels operiert, welche in Fig. XI mit K_2, K_3, K_4 bezeichnet sind; es ergab sich dann, daß alsdann auch K_1 durch die 3 Außenpunkte des Dreipasses ging.

Nun ist aber in Fig. XIII jeder Punkt z. B. N nicht blos als Innenpunkt eines Dreipasses, sondern zugleich als Außenpunkt von drei Dreipassen anzusehen, welche durch die punktierten Linien angedeutet sind. Um jedes dieser punktierten 3 Dreiecke läßt sich wieder je ein den drei erst betrachteten congruenter Kreis

beschreiben; diese Kreise entsprechen dem Kreise K_1 Fig. XI da sie durch die Außenpunkte der Dreipasse, welche innerhalb der punktierten Linien liegen, hindurchgehen.

Da nun jeder Punkt dieser charakteristischen Constellation zugleich als Innenpunkt eines und als Außenpunkt dreier Dreipasse betrachtet werden kann, so schneiden sich in jedem Punkte 6 congruente Kreise. Von diesen geht eine Gruppe von drei Kreisen durch die je 6 Punkte, welche die Ecken der drei Sechsecke bilden, denen der betreffende Punkt als gemeinsamer Eckpunkt angehört.

Die andere Gruppe von drei congruenten Kreisen, geht durch je 2 Punkte, welche mit dem betreffenden Punkte die Außenpunkte von drei Dreipassen bilden.

Da jeder Punkt (wie M) Innenpunkt eines Dreiecks ist, so ist er der Höhenschnittpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks, dessen Ecken die Außenpunkte des betreffenden Dreipasses bilden.

Da aber zugleich jeder Punkt (wie N) Außenpunkt von drei Dreipassen ist, so ist er der Höhenschnittpunkt von drei stumpfwinkligen Dreiecken, deren eines mit P Q R bezeichnet ist.

Also ist jeder Punkt (z. B. N) dieser Constellation zugleich Höhenschnittpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks M P S und dreier stumpfwinkliger Dreiecke, deren stumpfe Winkel ihren Scheitelpunkt in den Punkten P, M, S besitzen.

§ 8. Ueber die Centralprojektion congruenter Figuren, deren homologe Seiten parallel sind, und die Projektion des Kreisquadrupels.

Die Projektion eines Quadrupels von Kreisen liefert ein Quadrupel von Kegelschnitten; es handelt sich darum, ob der Umstand, daß diese Kreise congruent sind, auch ein charakteristisches Kennzeichen ihren Projektionen verleiht.

Denken wir uns zunächst in der Ebene zwei congruente Dreiecke A B C und A_1 B_1 C_1, deren homologe Seiten gleich und parallel gerichtet sind. Dieselben können wir uns vorstellen als central collineare Figuren, deren Projektionsstrahlen A A_1, B B_1, C C_1 sich in einem unendlich fernen Projektionscentrum P schneiden. Collineationsachse ist, da die Dreiecke als ähnliche Figuren anzusehen sind, die unendlich ferne Gerade g_∞. Also fällt das unendlich ferne Projektionscentrum in die unendlich ferne Collineationsachse hinein.

Projicieren wir 2 congruente Figuren von eben beschriebener Lage auf irgend eine Bildebene, so sind die Dreiecke A′ B′ C′, A_1' B_1' C_1' derartig central collinear gelegen, daß die Fluchtlinie ihre Collineationsachse ist und in derselben sich das Projektionscentrum befindet.

Umgekehrt folgt:

Haben 2 Dreiecke M N O, M_1 N_1 O_1 Fig. XIV eine derartige central collineare Lage, daß das Collineationscentrum P sich in der Collineationsachse v befindet, so werden, wenn man v als Verschwindungslinie betrachtet, beide Dreiecke auf eine zu v gehörige parallele Bildebene derartig projiciert, daß M′ N′ O′ congruent M_1' N_1' O_1'.

Denn da die Collineationsachse in's Unendliche fällt, so sind die Dreiecke zunächst ähnlich; da auch das Projektionscentrum ins Unendliche fällt, so sind die von ihm ausgehenden Projektionsstrahlen parallel.

Also sind M′ N′ und M_1' N_1' Parallele zwischen Parallelen; folglich

$$M' N' = M_1' N_1'$$
$$M' O' = M_1' O_1',$$
$$N' O' = N_1' O_1'.$$

Mithin Dreieck M′ N′ O′ congruent M_1' N_1' O_1'.

Betrachten wir nun den Fall, wo die homologen Seiten der congruenten Dreiecke zwar parallel sind, aber die Richtung A B entgegengesetzt der Richtung A_1 B_1 ist. (Vgl. die Dreiecke A_2 B_2 C_2 und $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{C}_1$ Fig. IXa.)

Verbinden wir dann in den congruenten Dreiecken die homologen Punkte A A_1, B B_1, C C_1, so schneiden sich diese Strahlen im Punkt S, welcher gemeinschaftlicher Mittelpunkt der drei Strahlen ist, also ist S harmonisch durch A und A_1 getrennt vom Schnittpunkt des Strahles A A_1 mit der unendlich fernen Geraden g_∞ in der Grundebene.

Ebenso läßt sich die Lage des Punktes S bei den übrigen Strahlen B B_1, C C_1 definieren und ist noch zu bemerken, daß g_∞ Collineationsachse der beiden congruenten Dreiecke ist.

Projiciert man nun die congruenten Dreiecke A B C und A_1 B_1 C_1 auf irgend eine Bildebene, so sind die Dreiecke A′ B′ C′ und A_1' B_1' C_1' central collinear gelegen. Collineationsachse ist die Fluchtlinie; das Collineationscentrum ist auf jedem Projectionsstrahl A′ A_1' harmonisch getrennt durch die homologen Punkte A′, A_1' vom Schnittpunkt des Strahles A′ A_1' mit der Fluchtlinie.

Umgekehrt folgt:

Hat das Collineationscentrum zweier Figuren eine solche Lage, daß es harmonisch getrennt ist durch je zwei homologe Punkte vom Schnittpunkt des projicierenden Strahles mit der Collineationsachse, so werden die Figuren, wenn man die Collineationsachse als Verschwindungslinie annimmt, auf eine ihr parallele Bildebene als congruente Figuren derartig projiciert, daß je zwei homologe Strecken entgegengesetzte Richtung haben.

Denn fällt die Collineationsachse der projicierten Figuren ins Unendliche, so wird das Collineationscentrum zum Mittelpunkt jedes einzelnen Projectionsstrahles zwischen je zwei homologen Punkten.

Jetzt betrachten wir zwei congruente Kreise K_1 und K_2 in der Grundebene.

Welche Lage dieselben auch haben mögen, ihre beiden Collineationsachsen sind g_∞ und die Chordale. Das eine Collineationscentrum, Schnittpunkt der immer vorhandenen äußeren Tangenten, liegt, da letztere parallel, auf g_∞; das andere Collineationscentrum ist aber bei congruenten Kreisen Schnittpunkt der Chordalen mit der Centralen.

Haben die Kreise eine reelle gemeinschaftliche Sehne, so ist ihr Mittelpunkt zweites Collineationscentrum beider Kreise.

Also fällt bei congruenten Kreisen je eines der beiden Collineationscentra auf je eine der beiden Collineationsachsen.

Projiciert man nun K_1 und K_2 auf irgend ein Bildebene, so sind die projicierten Kegelschnitte K'_1 und K'_2 unter allen Umständen derartig auf einander central collinear bezogen, daß sie zwei Collineationsachsen besitzen, deren eine die Fluchtlinie ist. Außerdem befindet sich in jeder der beiden Collineationsachsen ein Collineationscentrum.

Umgekehrt folgt:

Man habe zwei Kegelschnitte mit höchstens zwei reellen Schnittpunkten, so daß sie nur zwei Collineationsachsen und zwei Collineationscentra haben; liegt dann das eine Collineationscentrum auf der einen Collineationsachse, so liegt das andre Collineationscentrum auf der andern Collineationsachse.

Denn nimmt man die ideale Sehne als Verschwindungslinie, so kann man auf eine ihr parallele Bildfläche den einen Kegelschnitt als Kreis projicieren, wie gleich erläutert werden wird. Also wird die

Projektion des anderen als ähnliche Figur, da die Collineationsachse in's Unendliche fällt, auch ein Kreis. Die zweite Collineationsachse der Grundfiguren wird auf die Chordale der Kreise projiciert.

Wenn aber bei zwei Kreisen das eine Collineationscentrum entweder in g_∞ oder in die Chordale fällt, so muß nothwendigerweise das zweite Collineationscentrum entsprechend in die Chordale oder in g_∞ hineinfallen, und die Kreise sind congruent.

Also müssen auch in der Grundebene beide Collineationscentra sich auf den Collineationsachsen befinden.

Wir machen noch die Bemerkung, daß im Falle die andere Collineationsachse der Kegelschnitte eine reelle Sekante ist, das Collineationscentrum auf derselben harmonisch getrennt ist durch die Endpunkte der Sehne von dem Durchschnittspunkte der Sekante mit der zweiten Collineationsachse, welche eine ideale Sehne ist.

Denn das Collineationscentrum auf der reellen Sekante wird, wenn beide Kegelschnitte auf congruente Kreise projiciert werden, zum Mittelpunkt der reellen gemeinschaftlichen Sehne.

Um die erwähnte Construction, die Projektion eines Kegelschnittes K auf einen Kreis K' durchzuführen, nehmen wir eine ideale Sehne s in der Ebene von K als Verschwindungslinie an; ihr Pol in Bezug auf K' sei S. Auf s wird von K eine Involution von Punkten inducirt, welche perspektivisch zu dem involutorischen Strahlenbüschel liegt, das der Kegelschnitt K in S, dem Pole von s, inducirt.

Dann suche man nach bekannter Weise einen Punkt O im Raume, von dem aus die involutorisch gepaarten Punkte der Involution auf s unter rechten Winkeln gesehen werden. Durch diesen Punkt O und die ideale Sehne lege man die Verschwindungsebene. Alsdann wird auf einer dieser Verschwindungsebene parallelen Bildebene Kegelschnitt K in einen Kreis K' projiciert.

Denn in K' ist Punkt S' auf den Pol der unendlich fernen Geraden der Bildfläche, also auf den Mittelpunkt von K', projiciert, und alle durch K' gehenden conjugierten Durchmesser stehen nach der Construction auf einander senkrecht; also ist K' ein Kreis. Nach diesen Erörterungen sehen wir zu, wie sich die Projektion der in § 7 erwähnten Kreisquadrupel in Fig. X Taf. II gestaltet.

Wir bezeichnen das in Fig. XI Taf. I gezeichnete Kreisquadrupel, welches im § 7 untersucht ist, mit: [P], da sich im Punkt P drei Kreise desselben schneiden, und übertragen diese Bezeichnung auf die im § 6 erwähnten Dreiecke A' B' C' und A'' B'' C'', als deren Projektion von den Punkten O' und O'' das Dreieck A B C aufgefaßt wird.

Im Dreieck A' B' C' ist P'_2 Höhenschnittpunkt. Das Kreisquadrupel [P_2'] wird auf ein Quadrupel [P_2] von Kegelschnitten projiciert.

Die Kegelschnitte des Quadrupels [P_2] sind diejenigen vier Kegelschnitte, welche durch die Punkte A, B, C; A, B, P_2; B, C, P_2; A, C, P_2 gehen und alle vier die auf c_1 befindliche Involution, von welcher A $(A)_1$, B $(B)_1$ Γ $(C)_1$ drei Punktenpaare sind, zur Involution conjugierter Punktenpaare haben.

Analog folgt:

Im Dreieck A'' B'' C'' ist P_1'' Schnittpunkt der Höhen. Das Kreisquadrupel [P_1''] wird auf ein Quadrupel [P_1] von Kegelschnitten projiciert.

Die Kegelschnitte des Quadrupels [P_1] sind diejenigen vier Kegelschnitte, welche durch die Punkte A, B, C; A, B, P_1; B, C, P_1; A, C, P_1 gehen, und alle vier die auf c_2 befindliche Involution, von welcher A_2 $(A)_2$, B_2 $(B)_2$, Γ_2 $(C)_2$ drei Punktenpaare sind, zur Involution conjugierter Punkte haben.

Wir erhalten demnach:

1) Ein Quadrupel Kegelschnitte $[P_1]$;

2) Ein Quadrupel Kegelschnitte $[P_2]$.

Dieselben besitzen in K_1 einen beiden Quadrupeln gemeinsamen Kegelschnitt.

Für das Quadrupel $[P_1]$ und Kegelschnitt K_2 ist c_2 ideale Sehne; denn nach § 6 ist c_2 gemeinsame ideale Sehne von K_1 und K_2; die inducierte Involution wird repräsentiert durch die Punktenpaare A_2 $(A)_2$, B_2 $(B)_2$, Γ_2 $(C)_2$.

Ebenso ist für das Quadrupel $[P_2]$ und Kegelschnitt K_2 ist c_1 ideale Sehne; die inducierte Involution wird repräsentiert durch die Punktenpaare A_1 $(A)_1$, B_1 $(B)_2$, Γ_2 $(C)_2$.

Der beiden Quadrupeln gemeinsame Kegelschnitt K_1 und der Kegelschnitt K_2 haben die beiden Linien c_1 und c_2 als ideale gemeinsame Sehnen, und inducieren auf denselben die erwähnten Involutionen.

Für den Spezialfall des Dreiecks A' B' C', wo P_1' Höhenschnittpunkt, P_2' Schnittpunkt der Mittellinien ist, werden die sich in P_1' schneidenden Kegelschnitte des Quadrupels Kreise Die im Schnittpunkt der Mittellinien P_2 sich schneidenden Kegelschnitte des andern Quadrupels haben die Chordale des umschriebenen Kreises und des Feuerbachschen zur idealen Sehne. Sie inducieren auf derselben eine Involution, welche repräsentiert ist durch die Schnittpunkte der Seiten und Mittellinien mit der Chordale.

§ 9 Ermittelung der Collineationscentra je zweier zu den Quadrupeln gehörenden Kegelschnitte.

Jetzt ermitteln wir die Collineationscentra der zu einem Quadrupel gehörigen Kegelschnitte. Dieselben sind zugleich die Punkte, welche für die beiden betreffenden Kegelschnitte dasselbe Strahlensystem besitzen.

Betrachten wir das Quadrupel um $[P_1]$ Dasselbe ist die Abbildung congruenter Kreise im Dreieck A'' B'' C'', in welchem P_1'' Schnittpunkt der Höhen ist.

Gemeinschaftliche Sehnen dieser vier Kreise sind:

1) Die drei Seiten A'' B'', B'' C'', A'' C'',

2) die drei oberen Höhenabschnitte P_1'' A'', P_1'' B'', P_1'' C''.

Da die Kreise des Quadrupels congruent sind, so sind die Mittelpunkte der gemeinsamen Sehnen je zweier Kreise zugleich Collineationscentra derselben. Diese Mittelpunkte liegen aber auf dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks A'' B'' C''.

Es sind auf den Seiten die Punkte A_2'', B_2'', C_2'', auf den oberen Höhenabschnitten die Punkte $\mathfrak{A}_1''$, $\mathfrak{B}_1''$, $\mathfrak{C}_1''$.

Also sind auch in der Grundfigur die Punkte A_2, B_2, C_2, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ Collineationscentra je zweier zum Quadrupel $[P_1]$ gehörigen Kreise.

Ebenso findet man durch Projektion des Dreiecks A' B' B' von O' aus durch dieselben Schlüsse.

Die Durchschnittspunkte des Kegelschnittes K_2 mit den Seiten des Dreiecks A B C und den Transversalen P_2 A, P_2 B, P_2 C: d. h. die Punkte A_1, B_1, C_1, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$ sind die Collineationscentra je zweier zum Quadrupel $[P_2]$ gehörigen Kegelschnitte.

Hieraus folgt nach § 6:

Die nach § 6 (Ende) geometrisch bestimmbaren Punkte des Kegelschnittes K_2 sind zugleich als Schnittpunkte imaginärer Tangenten die inneren Collineationscentra für irgend 2 Kegelschnitte, welche demselben Quadrupel $[P_1]$ oder $[P_2]$ angehören.

Kommt bei dieser Combination der Kegelschnitte der beiden Quadrupeln gemeinsame Kegelschnitt K_1 vor, so liegen die Collineationscentra auf den Seiten des Dreiecks A B C; sonst auf den betreffenden durch P_1 oder P_2 gehenden Transversalen.

Zur Untersuchung der Lage der äußeren Collineationscentra der Kegelschnitte je eines Quadrupels betrachten wir zunächst Fig XI.

Es war § 7 gefunden worden, daß das von den drei Centralen gebildete Dreieck M_2 M_3 M_4 congruent A B C ist.

Ferner waren die homologen Seiten parallel und M_1, Mittelpunkt des um A B C beschriebenen Kreises, war Höhenschnittpunkt des Dreiecks M_2 M_3 M_4. Da diese congruenten Dreiecke parallele Seiten haben, so sind auch ihre Höhen parallel.

Wir können jetzt sagen:

Je zwei parallele Seitenpaare und die zu ihnen gehörenden Höhenpaare schneiden sich in 2 Punkten auf g_∞. Die drei auf diese Weise erhaltenen Punktenpaare bilden 3 Punktenpaare der Circularinvolution auf g_∞.

Da nun 2 äußere Tangenten an zwei Kreise, z. B. K_3, K_4 parallel der Centrale M_3 M_4 sind, so ist ihr Schnittpunkt auf g_∞ derjenige Punkt, wo g_∞ von M_3 M_4, oder der M_3 M_4 parallelen Linie B C geschnitten wird.

Analog ist der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten von K_1 und K_2 derjenige Punkt auf g_∞, wo g_∞ von der Centrale M_1 M_2 oder der ihr parallelen Höhe A P (von A auf B C) geschnitten wird.

Diese beiden Punkte gehören dem System der auf g_∞ befindlichen Circularinvolution an; ebenso können wir die übrigen Kreise combinieren und erhalten dann den Satz: (Fig. XI.)

Die Schnittpunkte zweier gemeinsamen Tangenten je zweier Außenkreise und die Schnittpunkte zweier gemeinsamen Tangenten des dritten Außenkreises und des Innenkreises K_1, schneiden sich in drei Punktenpaaren auf g_∞, welche der auf g_∞ befindlichen Circularinvolution angehören.

Diese Punktenpaare sind dieselben in denen g_∞ von den Seiten und Höhen des Dreiecks A B C, oder von den Seiten des vollständigen Vierecks A B C P geschnitten wird.

Den soeben ausgesprochenen Satz denken wir uns auf Dreieck A′ B′ C′ angewendet. Da in demselben P_2' Höhenpunkt ist, so bleibt der Wortlaut des Satzes unverändert, nur hat man den Index hinzuzufügen also statt A : A′, ꝛc. und statt P : P_2' zu setzen.

Dann denken wir uns A′ B′ C′ durch O′ in die Grundebene projiciert und erhalten für Dreieck A B C und P_2 den Satz:

(Für die oberen Buchstaben). Die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten je zweier Kegelschnitte des Quadrupels $\begin{bmatrix} P_2 \\ P_1 \end{bmatrix}$ und der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten des dritten durch $\begin{matrix} P_2 \\ P_1 \end{matrix}$ gehenden Kegelschnittes und des

beiden Quadrupeln $[P_2]$ und $[P_1]$ gemeinsamen Kegelschnittes K_1 gehören als 2 involutorisch gepaarte Punkte zu der auf $\frac{c_1}{c_2}$ schon vorhandenen Involution der Punkte

$$A_1\ (A)_1,\ B_1\ (B)_1,\ \Gamma\ (C)_1$$
$$A_2\ (A)_2,\ B_2\ (B)_2,\ \Gamma_2\ (C)_2$$

Durch Projektion des Dreiecks A'' B'' C'', in welchem P_1' Höhe ist, erhält man denselben Satz für untere Buchstaben.

Demnach ergiebt sich:

Diejenigen 3 Punktenpaare der beiden Involutionen auf c_1, c_2, in denen diese Linien durch die Gegenseiten der Vierecke A B C P_2 und A B C P_1 geschnitten werden, liefern zugleich die äußeren Collineationscentra für je zwei zu einem der Quadrupel $[P_1]$ oder $[P_2]$ gehörigen Kegelschnitte.

Zwischen je zwei Kegelschnitten verschiedener Quadrupel, welche aber eine Seite des Dreiecks A B C als gemeinschaftliche Sehne besitzen, bildet der Kegelschnitt K_2 folgende vermittelnde Beziehung.

In Fig. VIII. ist K_2 Feuerbachscher Kreis eines jeden der Teildreiecke um P_1, z. B. des Dreiecks A C P_1. Auch für den Fall des stumpfwinkligen Dreiecks gilt der Satz:

Der Höhenschnittpunkt ist äußerer Ähnlichkeitspunkt des Feuerbach'schen Kreises und des dem Dreieck umschriebenen Kreises. Also ist in Figur VIII Punkt B, (Höhenschnittpunkt des Dreiecks A C P_1), der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten des Feuerbach'schen Kreises und des dem Dreieck A C P_1 umschriebenen Kreises.

Allgemein folgt für Fig. VIII:

Jede Ecke des Dreiecks A B C ist Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten des Feuerbach'schen Kreises und des zum Quadrupel $[P_1]$ gehörigen Kreises, welcher durch die beiden anderen Ecken und den Höhenschnittpunkt von A B C geht.

Diesem Satz kann man folgende Form geben:

Zieht man von den drei Eckpunkten eines Dreiecks die 6 Tangenten an den Feuerbach'schen Kreis, so sind die Seiten dieses dem Feuerbach'schen Kreis umschriebenen Sechsecks zugleich die gemeinschaftlichen Tangenten des Feuerbach'schen Kreises und der durch den Höhenschnittpunkt gehenden Quadrupelkreise.

Nun übertragen wir die erste Form dieses Resultates auf Dreieck A' B' C', wo P'_2 Höhenschnittpunkt ist, und zugleich auf Dreieck A'' B'' C'', wo P'_1 Höhenschnittpunkt ist.

Durch Projektion von O' erhalten wir:

Jede Ecke des Dreiecks A B C ist Collineationscentrum des Kegelschnittes K_2 und derjenigen Quadrupelcurve von $[P_2]$, welche die gegenüberliegende Seite zur Sehne hat.

Durch Projektion von O'' erhalten wir:

Jede Ecke des Dreiecks A B C ist Collineationscentrum des Kegelschnittes K_2 und derjenigen Quadrupelcurve von $[P_1]$, welche die gegenüberliegende Seite zur Sehne hat.

Hieraus folgt:

Zwei Kegelschnitte der verschiedenen Quadrupel, welche eine Seite des Dreiecks A B C als gemeinschaftliche Sehne besitzen, und der Kegelschnitt

K_2 besitzen 2 gemeinsame äußere Tangenten, deren Schnittpunkt die der gemeinsamen Sehne der (Quadrupel-Kegelschnitte) gegenüberliegende Ecke des Dreiecks A B C ist.

Durch dieses eine Collineationscentrum ist aber auch das andere und die Collineationsachsen bestimmbar.

Für den Spezialfall, wo P_1 Schnittpunkt der Höhen, P_2 Schnittpunkt der Mittellinien ist, ergiebt sich demnach folgendes Resultat: Fig. VIII.

Die Seiten des kürzlich erwähnten Sechsecks, welche den Feuerbach'schen Kreis und die durch P_1 gehenden Quadrupel-Kreise tangieren, berühren auch die sich in P_2 schneidenden Kegelschnitte des andern Quadrupels.

Von jedem dieser letzteren drei Kegelschnitte, welche schon bestimmt sind durch die Ecken eines der Teildreiecke mit der Spitze P_2 und die auf der Chordale durch den Feuerbach'schen Kreis inducierte Involution, sind also außerdem noch 2 Tangenten bekannt, welche durch die Ecken des Dreiecks A B C gehen.

Wir ersehen aus dieser Betrachtung, daß außer den Linien c_1 und c_2 auch die Seiten des Dreiecks A B C und seine 6 Transversalen zugleich Collineationsachsen gewisser Verbindungen der vorkommenden Kegelschnitte sind.

Außerdem sind außer den Punkten P_1 und P_2 noch die Eckpunkte des Dreiecks A B C, die 12 bestimmbaren Punkte der Curve K_2 und die auf c_1 und c_2 befindlichen $2.6 = 12$ Punkte als Collineationscentra gewisser Verbindungen der vorkommenden Kegelschnitte zu betrachten.

§ 10.

Die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchung im zweiten Abschnitt sind zusammengefaßt in folgender

Rekapitulation.

Wir nehmen an, daß die Punkte A B C und die Transversalenschnittpunkte eine solche Lage haben, daß in einer elliptischen Involution geschnitten werden

1) Collineationsachse c_1 der Dreiecke A B C und A_1 B_1 C_1 von den Seiten des 4Ecks A B C P_2,
2) „ c_2 „ „ A B C „ A_2 B_2 C_2 „ „ „ „ „ A B C P_1.

Es repräsentieren die Punkte

A_1 $(A)_1$, B_1 $(B)_1$, Γ_1 $(C)_1$ die Involution auf c_1,

A_2 $(A)_2$, B_2 $(B)_2$, Γ_1 $(C)_2$ die Involution auf c_2.

Diese beiden Involutionen auf c_1 und c_2 bestimmen ein Kegelschnittbüschel mit 4 imaginären Grundpunkten. Durch die Punkte A B C geht der zu diesem Büschel gehörige Kegelschnitt K_1.

Ein anderer zu diesem Büschel gehöriger Kegelschnitt K_2 geht durch die 6 Fußpunkte der Transversalen A_1, B_1 C_1, und A_2, B_2, C_2.

Außerdem sind noch die oberen Durchschnittspunkte dieser Transversalen mit K_2, nämlich die Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$ geometrisch leicht zu construieren, so daß Kegelschnitt K_2 durch 12 bestimmbare Punkte geht.

Dieser Kegelschnitt K_2 ist auf doppelte Weise, je nachdem man c_1 oder c_2 als Verschwindungslinie annimmt, als Projektion eines Feuerbachschen Kreises aufzufassen.

Und zwar ist bei passender Bestimmung des Projektionscentrums (Seite 19.)

für c_1 Verschwindungslinie: im Dreieck $A' B' C'$: P_1' Schnittpunkt der Mittellinien P_2' der Höhenschnittpunkt.

" c_2 " " " $A'' B'' C''$: P_2'' " " " P_1'' " "

Für die Büschelcurven K_1 und K_2 sind c_1 und c_2 Collineationsachsen; die Punkte P_1 und P_2 Collineationscentra. Mittelst derselben sind K_1 und K_2 auf einander in vierfacher Weise central collinear bezogen.

Diese 4 Beziehungen sind repräsentiert durch die 4 Dreiecke

$$A_1 \quad B_1 \quad C_1,$$
$$A_2 \quad B_2 \quad C_2,$$
$$\mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{C}_1,$$
$$\mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{B}_2 \quad \mathfrak{C}_2;$$

in jedem von ihnen entsprechen die drei Ecken den Punkten $A\,B\,C$ des Kegelschnittes K_1 auf dem Kegelschnitt K_2.

Je ein Fußpunkten-Dreieck des einen Systems und ein Dreieck, gebildet aus den obern Durchschnittspunkten des andern Systems von Transversalen mit K_2, sind die Diagonal-Dreiecke, (s. Seite 13) eines ihre Eckpunkte umschließenden involutorischen Sechsecks. Letztere werden gebildet von den Punkten

1) $A_1 \; \mathfrak{C}_2 \; B_1 \; \mathfrak{A}_2 \; C_1 \; \mathfrak{B}_2$,

2) $A_2 \; \mathfrak{C}_1 \; B_2 \; \mathfrak{A}_1 \; C_2 \; \mathfrak{B}_1$.

Die gegenüberliegenden Seiten und Diagonalenpaare des ersten schneiden sich in den involutorisch gepaarten Punkten der Linie c_1, der Collineationsachse des Dreiecks $A\,B\,C$ und des Fußpunktendreiecks $A_1\;B_1\;C_1$. Die gegenüberliegenden Seiten und die Diagonalenpaare des zweiten Sechsecks schneiden sich in den involutorisch gepaarten Punkten der Linie c_2.

Linie $P_1\,P_2$ ist gemeinsame Polare des Schnittpunktes S der Linien c_1 und c_2 für beide Kegelschnitte K_1 und K_2.

Der Kegelschnitt K_1 berührt 32 Kegelschnitte, welche die drei Seiten des Dreiecks $A\,B\,C$ und die Seiten der um P_1 und P_2 liegenden Teildreiecke berühren und durch die auf c_1 oder c_2 schon vorhandenen Involutionen bestimmt sind.

Diese 32 Kegelschnitte zerfallen in 2 Gruppen zu je 16 Kegelschnitten.

Die eine Gruppe der 16 Kegelschnitte berührt die drei Seiten des Dreiecks $A\,B\,C$ oder die drei Seiten der drei um P_1 liegenden Teildreiecke. Sie haben c_2 als ideale Sehne gemeinschaftlich und inducieren auf c_2 die dort schon repräsentierte Involution.

Die andere Gruppe von 16 Kegelschnitten berührt die 3 Seiten des Dreiecks $A\,B\,C$ oder die 3 Seiten der 3 um P_2 liegenden Teildreiecke. Sie haben c_1 als ideale Sehne gemeinschaftlich und inducieren auf c_1 die dort schon repräsentierte Involution.

Zwei Ecken des Dreiecks $A\,B\,C$ und Punkt P_1 oder: Zwei Ecken des Dreiecks $A\,B\,C$ und Punkt P_2 bestimmen im Verein mit der auf c_2 oder c_1 befindlichen Involution 6 weitere Kegelschnitte, deren 3 durch P_1 gehen und mit K_1 das Quadrupel $[P_1]$ bilden.

Die drei andern gehen durch P_2 und bilden mit K_1 das Quadrupel $[P_2]$.

K_1 gehört beiden Quadrupeln als gemeinsamer Kegelschnitt an.

Da K_1 und K_2 die idealen Sehnen c_1 und c_2 besitzen, welche auch gemeinsame ideale Sehnen des Quadrupels $[P_2]$ und $[P_1]$ sind, so haben K_2 und je ein Kegelschnitt des Quadrupels $[P_2]$ Linie c_1 und K_2 und je ein Kegelschnitt des Quadrupel $[P_1]$ Linie c_2 als ideale Sehne gemeinsam.

Die andere Collineationsachse der Combination der eben bezeichneten Kegelschnitte ist eine reelle Sekante.

Also ergiebt sich:

Je ein Kegelschnitt der Quadrupel [P_1] und [P_2] stellt im Verein mit K_1 ein Kegelschnittbüschel mit 2 reellen und 2 imaginären Grundpunkten dar. Die Verbindungslinie der letzteren ist die Linie c_1 oder c_2.

Es entstehen somit durch Combination des Kegelschnittes K_2 mit den durch P_1 oder P_2 gehenden Curven 6 Büschel von Kegelschnitten mit 2 reellen und 2 imaginären Grundpunkten; außerdem stellen K_1 und K_2 ein Büschel von 4 imaginären Grundpunkten dar.

Diese 7 Kegelschnittbüschel haben alle in K_2 einen gemeinsamen Kegelschnitt.

Sämtliche Collineationscentra zweier Kegelschnitte, welche demselben Quadrupel angehören, liegen, wenn sie die Schnittpunkte imaginärer Tangenten darstellen, auf den 12 bestimmbaren Punkten des Kegelschnittes K_2.

Sind die Collineationscentra die Schnittpunkte reeller Tangenten, so fallen sie mit den Punkten zusammen, welche auf c_1 und c_2 die dort befindlichen Involutionen angeben.

Zwei Kegelschnitte, welche verschiedenen Quadrupeln angehören, aber eine Seite des Dreiecks A B C als gemeinsame Sehne besitzen, haben mit K_2 ein gemeinsames Collineationscentrum, den Schnittpunkt der reellen Tangenten, in derjenigen Spitze des Dreiecks A B C, welche der gemeinsamen Sehne gegenüberliegt.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß auch die Sätze, welche durch das Princip der Dualität sich aus vorstehenden Resultaten ableiten lassen, Stoff zu weiteren interessanten Betrachtungen darbieten.

Inhalt.

Durch die notwendige Beschleunigung des Druckes sind einige kleinere Fehler und Unzuträglichkeiten in der äußeren Form stehen geblieben, welche der Leser entschuldigen wolle.

Fig. VIII.

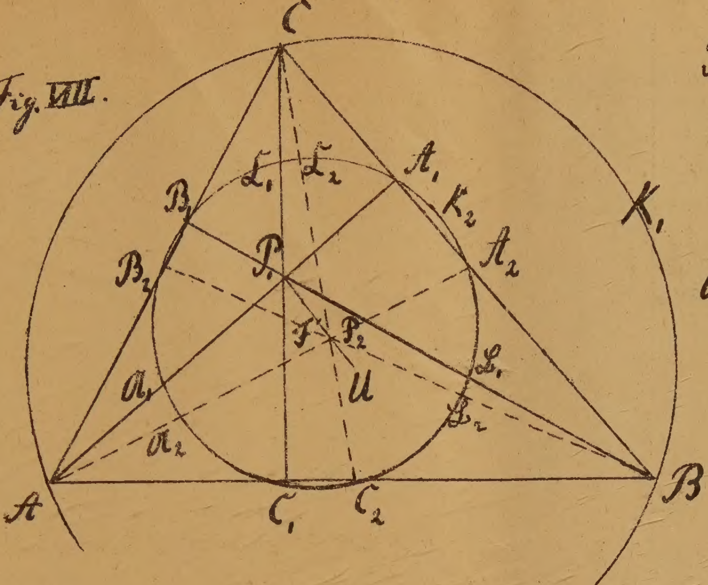


Fig. IX a

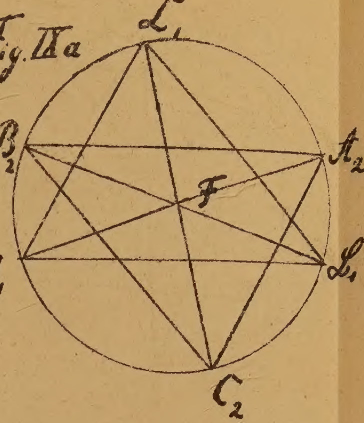


Fig. IX. b.

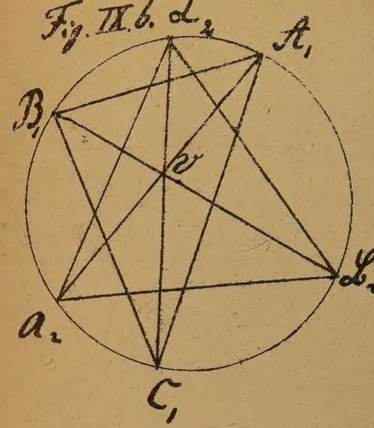


Fig. XI.

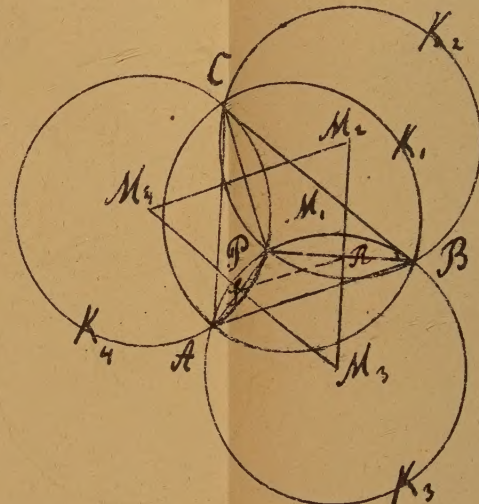


Fig. V.

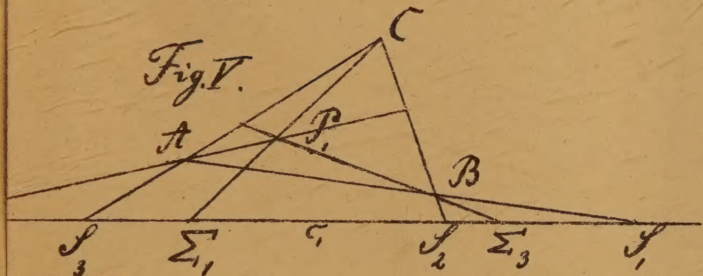


Fig. XII

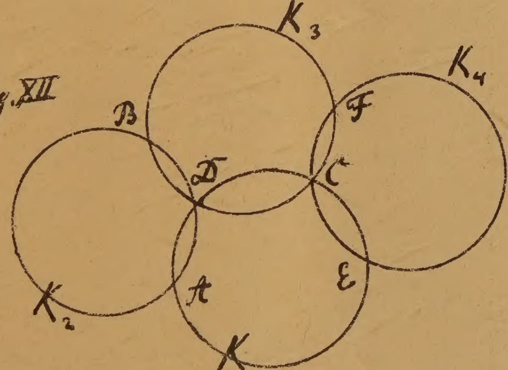


Fig. XIII.

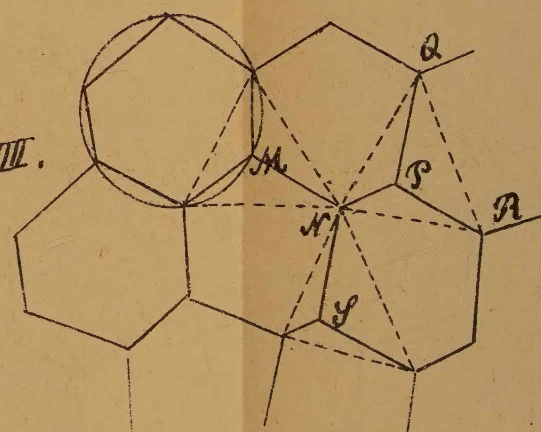


Fig. XIV.

